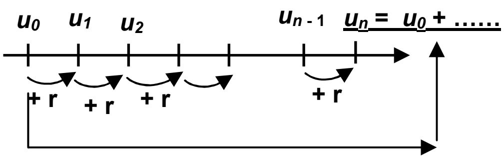
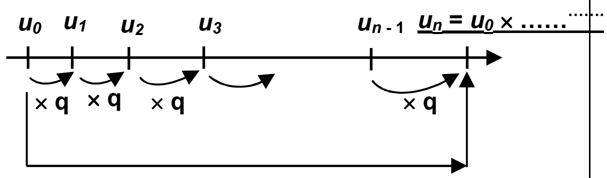
RAPPELS CHAPITRE 4 :

SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES.

I) RAPPELS DE COURS :

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel, indépendant de n, appelé **la raison de la suite**.	$u_{n+1} = u_n \times q$ où q est un réel non nul, indépendant de n, appelé **la raison de la suite.**
Caractérisation par une formule explicite	$u_n = u_0 + n \times r$ u_0 étant le terme initial de la suite.	$u_n = u_0 \times q^n$ u_0 étant le terme initial de la suite.
Représentation graphique sur un axe		
Relation entre deux termes quelconques de la suite	pour tous entiers naturels p et q, $u_p = u_q + r \times (p - q)$	pour tous entiers naturels m et n, $u_m = u_n \times q^{(m-n)}$
Sommes particulières	$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = n \times \frac{1+n}{2}$ $= \frac{n \times (n+1)}{2}$	Si $q \neq 1$, alors : $1 + q + q^2 + \ \ldots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ Si $q = 1$, alors : $1 + q + q^2 + \ \ldots + q^{n-1} + q^n = n + 1$
Sommes de termes consécutifs	La somme de $(n + 1)$ termes consécutifs d'une suite arithmétique est : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$ $= (n + 1) \times (\frac{u_0 + u_n}{2})$ Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = nombre de termes × $\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$	La somme de $(n + 1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\boxed{q \neq 1}$ est : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$ $= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique = premier terme × $\frac{\text{1 - raison}^{\text{"nombre de termes"}}}{\text{1 - raison}}$ ou $\frac{\text{premier terme – dernier terme × raison}}{\text{1 - raison}}$

Remarque : NOMBRE DE TERMES dans $S = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{q-1} + u_q$

Il y a $q - (p - 1) =$ $\boldsymbol{q - p + 1}$ **termes dans cette somme**.

RAPPELS CHAPITRE 4

II) EXERCICES "TYPES" :

Point méthode 1 : montrer qu'une suite est arithmétique.

On peut montrer que la différence $(u_{n+1} - u_n)$ est toujours constante.

EX : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - 2$.

Montrer que (u_n) est arithmétique.

Point méthode 2 : montrer qu'une suite est géométrique.

On peut montrer, à condition que la suite (u_n) **<u>soit à termes non nuls</u>**, que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est toujours constant.

EX : Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2}{3^n}$.

Montrer que cette suite est géométrique.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^n \neq 0$ et $\dfrac{2}{3^n} \neq 0$, donc $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Point méthode 3 : calculer le premier terme et la raison d'une suite arithmétique ou géométrique.
On utilise la formule $u_p = u_q + r \times (p - q)$ pour une suite arithmétique (p et q entiers naturels).

On utilise la formule $u_m = u_n \times q^{(m-n)}$ pour une suite géométrique (m et n entiers naturels).

EX 1 : Soit la suite arithmétique (u_n) dont on connaît deux termes $u_{15} = \dfrac{5}{4}$ et $u_{37} = \dfrac{49}{4}$.

Calculer le premier terme u_0 et la raison r de cette suite.

RAPPELS CHAPITRE 4

On a, pour tous entiers naturels p et q : $u_p = u_q + r \times (p - q)$. En particulier :

La suite arithmétique (u_n) a donc pour premier terme $u_0 =$ …… et pour raison $r =$ …….

EX 2 : Soit la suite géométrique (u_n) dont on connaît deux termes $u_7 = 4374$ et $u_4 = -162$.

Calculer le premier terme u_0 et la raison q de cette suite.

On a, pour tous entiers naturels m et n, $u_m = u_n \times q^{(m-n)}$. En particulier :

La suite géométrique (u_n) a donc pour premier terme $u_0 =$ ….. et pour raison $q =$ …….

Point méthode 4 : calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Pour une suite arithmétique, on utilise la formule :

$$\text{Somme des termes \underline{consécutifs} d'une suite arithmétique} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Pour une suite géométrique, on utilise la formule :

$$\text{Somme des termes \underline{consécutifs} d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{"nombre de termes"}}}{1 - \text{raison}}$$

EX 1 : Reprenons la suite arithmétique (u_n) dont on connaît deux termes $u_{15} = \frac{5}{4}$ et $u_{37} = \frac{49}{4}$.

Calculer la somme $S = \sum_{k=15}^{37} u_k$.

On utilise la formule ci-après :

RAPPELS CHAPITRE 4

Somme des termes <u>consécutifs</u> d'une suite arithmétique = nombre de termes × $\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$

S =

EX 2 : Calculer S = $5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{10}$.

On définit la suite (u_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 5^n$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 5^{n+1} = 5 \times 5^n = 5u_n$ ce qui prouve que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$.

$5^2 = u_2$ et $5^{10} = u_{10}$.

On utilise la formule :

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique = premier terme × $\frac{1 - \text{raison}^{\text{"nombre de termes"}}}{1 - \text{raison}}$

S =

Point méthode 5 : trouver le terme général d'une suite (u_n).

On introduit une nouvelle suite, définie à partir de (u_n), et on étudie la nature de cette suite.

EX : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$.

On pose $v_n = u_n + 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

SOLUTION :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 =$

Comme, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = v_n - 4$, on obtient : $v_{n+1} =$

On a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} =$ …….., ce qui prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison …..

2. Par propriété, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n =$ ……………….. . Or : $v_0 =$ …………………

Par conséquent :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n =$ ……………… et

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n =$ ………………………………………………..

RAPPELS CHAPITRE 4

III) SENS DE VARIATION :

Propriété 1 : soir u une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$ alors la suite est strictement croissante ;

Si $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante ;

Si $r = 0$ alors la suite est ……………………………

EX : Soit (u_n) la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3n + 170$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n =$

La variation absolue $(u_{n+1} - u_n)$ est …………….., donc la suite u est …………………………, de raison ……

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison ……. , strictement …………….., donc la suite (u_n) est strictement ……………………

Propriété 2 : Soit q un réel non nul.

- **Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante**
- **Si $q = 1$ alors la suite est constante**
- **Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante**
- **Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est pas monotone**

Justification :

Pour tout entier naturel n, $q^{n+1} - q^n = q^n(\ldots\ldots\ldots..)$

Si $q > 0$, alors q^n …… 0 et $q^{n+1} - q^n$ a le même signe que (……….)

- **Si $q = 1$**, alors $q^{n+1} = q^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, donc la suite est constante.
- **Si $q > 1$,** alors $q - 1$ …… 0, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^{n+1} - q^n$ …… 0 et la suite (q^n) est strictement ………………………….
- **Si $0 < q < 1$,** alors $q - 1$ …… 0, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^{n+1} - q^n$ …… 0 et la suite (q^n) est strictement ………………………….
- **Si $q < 0$,** alors q^{n+1} et q^n sont de signes …………………, donc la suite (q^n) prend alternativement des valeurs ……………………. et des valeurs ………………. : la suite (q^n) ne peut être ………………….

RAPPELS CHAPITRE 4

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q strictement positive et de terme initial u_0.

- **Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement ……………………..**
  Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement ……………………..
- **Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement ………………………..**
  Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement ………………………..
- **Si $q = 1$ alors la suite est ……………….**

Justification :
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$

Ainsi, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = q^n \times u_0 \times (\ldots\ldots\ldots\ldots)$
$q > 0$, donc on en déduit que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $u_0 \times (\ldots\ldots\ldots.)$

- **Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$,** alors $(q - 1)$ …… 0 et $u_0 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ ……. 0 et la suite (u_n) est strictement …………………………..
- **Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$,** alors $(q - 1)$ …… 0 et $u_0 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ ……. 0 et la suite (u_n) est strictement …………………………..
- **Si $q > 1$ et $u_0 < 0$,** alors $(q - 1)$ …… 0 et $u_0 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ ……. 0 et la suite (u_n) est strictement …………………………..
- **Si $q > 1$ et $u_0 > 0$,** alors $(q - 1)$ …… 0 et $u_0 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ ……. 0 et la suite (u_n) est strictement ………………………….

EX 1 : Soit u la suite géométrique de raison $q = 2$ et de terme initial $u_0 = \frac{1}{4}$.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times \ldots\ldots^{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots^{\ldots\ldots}$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison ……., strictement ………………………et u_0 ..……, donc la suite (u_n) est strictement ……………………

EX 2 : Soit v la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = 8$.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 \times \ldots\ldots^{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots^{\ldots\ldots}$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison ……. , comprise strictement entre …………….. et

v_0 ………, donc la suite (v_n) est strictement ……………………