Éléments de correction des exercices du chapitre 11

EXERCICE N° 1 :

16 page 215 du LIVRE :

a) F est dérivable sur I et $\forall x \in$ I, on a : $F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$.

b) F est dérivable sur I et $\forall x \in$ I, on a : $F'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x) = f(x)$

19 page 215 du LIVRE : ***corrigé dans le livre page 472.***

20 page 215 du LIVRE :

a) $\forall x \in$ I, on a : $G(x) - F(x) = 4$ (= constante) donc la réponse est **OUI**.

b) $\forall x \in$ I, on a : $G(x) - F(x) = 1$ (= constante) donc la réponse est **OUI**.

22 page 215 du LIVRE :

On trouve que : $F(0) = G(0) = 0$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 3 + 4 = 3$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 + 2 = 2$.

On en déduit que : $(F - G)(0) = 0$ et $(F - G)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Par suite, F – G n'est pas constante sur I et **F et G ne sont donc pas deux primitives de la même fonction**.

EXERCICE N° 2 :

23 page 216 du LIVRE :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$. b) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}x$.

c) $\forall x \in \ ]0 ; +\infty[$, on a : $F(x) = x + \frac{1}{x}$.

24 page 216 du LIVRE :

a) $\forall x \in \ ]0 ; +\infty[$, on a : $F(x) = -\frac{1}{x^2}$. b) $\forall x \in \ ]-\infty ; 0[$, on a : $F(x) = \frac{3}{x}$.

c) $\forall x \in \ ]0 ; +\infty[$, on a : $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - x$.

25 page 216 du LIVRE :

a) $\forall x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, on a : $F(x) = 2\sqrt{2x + 1}$. b) $\forall x \in \ ]1 ; +\infty[$, on a : $F(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

c) $\forall x \in \ ]-6 ; 1[$, on a : $F(x) = -2\sqrt{-x^2 - 5x + 6} - x$.

26 page 216 du LIVRE :

a) $\forall x \in \ ]0 ; +\infty[$, on a : $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{3x} - \sqrt{2}x$. b) $\forall x \in \ ]1 ; +\infty[$, on a : $F(x) = 2\sqrt{x - 1}$.

c) $\forall x \in \ ]-\infty ; 1[$, on a : $F(x) = -4\sqrt{1 - x} - x$.

28 page 216 du LIVRE :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{(1 + x^2)^8}{8}$. b) $\forall x \in \ ]-4 ; +\infty[$, on a : $F(x) = -\frac{1}{(x + 4)^2}$.

c) $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$, on a : $F(x) = -\frac{1}{3(3x - 1)}$.

29 page 216 du LIVRE :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{-1}{x^2 - x + 3}$. b) $\forall x \in \ ]-1 ; 3[$, on a : $F(x) = \frac{-1}{2(x^2 - 2x - 3)}$.

c) $\forall x \in \ ]-2 ; +\infty[$, on a : $F(x) = \frac{-2}{3(x^3 + 8)^2}$.

30 page 216 du LIVRE :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\cos(2x)}{2}$. b) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = 3\sin(x) + \cos(2x) + x$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Éléments de correction des exercices du chapitre 11

31 page 216 du LIVRE :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{3}{2}\sin^2 x + 8\sin x$ ou $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{3}{2}\cos^2 x + 8\sin x$.

c) $\forall\, x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x) = 2\tan(x) - x$.

EXERCICE N° 3 :

36 page 216 du LIVRE : ***corrigé dans le livre page 472.***

37 page 216 du LIVRE :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} - \frac{1}{3e^2}$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{5}{4}$.

c) $\forall\, x \in\,]1 ; +\infty[$, on a : $F(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln 3$ ou $F(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{3}\right)$.

EXERCICE N° 4 : ***exercice 4 page 43 (annabac 2012).***
Corrigé pages 58/…/62.

EXERCICE N° 5 :

64 page 220 du LIVRE :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = -\frac{2}{3}e^{-3x+2}$.

c) $\forall\, x \in\,]0 ; +\infty[$, on a : $F(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}$

d) $\forall\, x \in\,]-1 ; +\infty[$, on a $F(x) = e^{\frac{2x+1}{x+1}}$

67 page 220 du LIVRE : ***corrigé dans le livre page 472.***

68 page 220 du LIVRE :

1. On applique la formule donnant la dérivée de $\frac{f}{g}$ avec : $\forall\, x \in I$, $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos^3 x$.

Indication : $\forall\, x \in I$, on a : $g'(x) = -3\sin x\cos^2 x$.

2. $\forall\, x \in I$, on a : $u'(x) = 3v(x) - 2 \times (\tan)'(x)$.

On en déduit : $\forall\, x \in I$, $v(x) = \frac{u'(x) + 2 \times (\tan)'(x)}{3}$.

On trouve : $\forall\, x \in I$, $V(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + 2\tan x\right)$.

72 page 220 du LIVRE :

a) $\forall\, x \in\,]3 ; +\infty[$, on a : $F(x) = \ln(x-3) + \ln(x+3) = \ln(x^2-9)$.

b) $\forall\, x \in\,]-3 ; 3[$, on a : $F(x) = \ln(3-x) + \ln(x+3) = \ln(9-x^2)$.

c) $\forall\, x \in\,]-\infty ; -3[$, on a : $F(x) = \ln(3-x) + \ln(-x-3) = \ln(x^2-9)$.

73 page 220 du LIVRE :

$\forall\, x \in\,]-\infty ; -2[$, on a : $f(x) = 1 + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ (*Indication : méthode des coefficients indéterminés).*

On trouve : $\forall\, x \in\,]-\infty ; -2[$, $F(x) = x + 2\ln(-x-2) - \frac{1}{x+2}$.

Éléments de correction des exercices du chapitre 11

EXERCICE N° 6 :

80 page 221 du LIVRE :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $2\sin x - \sin x\cos^2 x = \sin x(2 - \cos^2 x) = \sin x(1 + \underline{\underline{\cos^2 x + \sin^2 x}} - \cos^2 x) = f(x)$.

On trouve alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -2\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$.

82 page 221 du LIVRE :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \cos x(\sin^4 x(1 - \sin^2 x)^2) = \cos x(\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x)$ et on a : $a = 1$; $b = -2$ et $c = 1$.

On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\sin^5 x}{5} - \dfrac{2\sin^7 x}{7} + \dfrac{\sin^9 x}{9}$.

84 page 221 du LIVRE :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2(2x)) = \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right]$$

$$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8}$$

On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{\sin(2x)}{4} + \dfrac{\sin(4x)}{32}$.

86 page 221 du LIVRE : ***corrigé dans le livre page 472.***

EXERCICE N° 7 : ***Extrait de l'épreuve du concours FESIC (mai 2010)***

a. Si φ est définie par $\varphi(x) = x^3 - 1$, alors quel que soit le réel a, il existe un polynôme de degré 2, solution de [E].

$\boxed{\textbf{FAUX}}$**.**

Si $a = 0$ par exemple :

f solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^3 - 1$.

f solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Dans ce cas, les solutions sont de degré 4, et non de degré 2.

b. Si φ est définie par $\varphi(x) = e^{2x}$, alors quel que soit le réel a, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que la fonction f, définie par $f(x) = be^{2x}$ soit solution de [E].

$\boxed{\textbf{FAUX}}$.

Si $a = -2$, alors : (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

S'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = be^{2x}$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2be^{2x}$ et on a alors :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - 2f(x) = 2be^{2x} - 2be^{2x} = 0 \neq e^{2x}$.

Si $a \neq -2$, alors on prend $b = \dfrac{1}{2 + a}$ (qui existe vu que $a \neq -2$) tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = be^{2x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a alors : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2 + a}$ et $f'(x) = \dfrac{2 \times e^{2x}}{2 + a} = 2 \times f(x)$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + af(x) = 2f(x) + af(x) = (2 + a)f(x) = (2 + a) \times \dfrac{e^{2x}}{2 + a} = e^{2x} = \varphi(x)$ **.**

Conclusion : si $a \neq -2$, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ ($b = \dfrac{1}{2 + a}$) tel que f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = be^{2x}$ soit solution de (E). Mais si $a = -2$, b n'existe pas.

c. Si φ est la fonction constante nulle et si f est une solution de [E], alors la courbe représentant f possède au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = (1 - ax)f(0)$.

$\boxed{\textbf{VRAI}}$.

f solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -af(x)$

$f'(0) = -af(0)$ et $T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $T_0 : y = -af(0) \times x + f(0)$ ou $y = f(0)(-ax + 1)$.

d. Si a = 0, alors quelle que soit la fonction φ définie et continue sur $\mathbb{R}$, [E] possède une solution.

$\boxed{\textbf{VRAI}}$.

Pour $a = 0$, (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow f$ est une primitive de φ sur $\mathbb{R}$.

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, alors φ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N° 8 : ***Extrait de Antilles-Guyane (septembre 2008)***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ (cours), donc par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} (4e^x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ (cours), donc par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3) = 3$.

Par quotient des deux limites précédentes, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4e^x}{e^x + 3} = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2) = -\infty$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x + 2) = -\dfrac{4e^x}{e^x + 3}$.

<u>Étude au voisinage de $(-\infty)$:</u>

Or, d'après 1. a., on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{4e^x}{e^x + 3}\right) = 0$.

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0$, **ce qui prouve que la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $(-\infty)$.**

<u>Étude au voisinage de $(+\infty)$:</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{4e^x}{e^x + 3} = \dfrac{e^x \times 4}{e^x\left(1 + \dfrac{3}{e^x}\right)} = \dfrac{4}{1 + \dfrac{3}{e^x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (cours), donc par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{e^x} = 0$.

Par somme, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{e^x}\right) = 1$ et par quotient, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{1 + \dfrac{3}{e^x}}\right) = 4$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 2)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{4e^x}{e^x + 3}\right) = -4 \neq 0$, donc **la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ n'est pas asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $(+\infty)$.**

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x + 2) = -\dfrac{4e^x}{e^x + 3}$.

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; $e^x + 3 > 0$ et $4 > 0$, alors par quotient : $\dfrac{4e^x}{e^x + 3} > 0$ et par suite : $-\dfrac{4e^x}{e^x + 3} < 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x + 2) < 0$, **ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de son asymptote $\mathcal{D}_1$ au voisinage de $(-\infty)$.**

2. a. Comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + 3 > 0$, le dénominateur dans $\dfrac{4e^x}{e^x + 3}$ ne s'annule jamais.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule jamais) et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boldsymbol{f'(x)} = 1 - \frac{4e^x \times (e^x + 3) - 4e^x \times e^x}{(e^x + 3)^2} = 1 - \frac{12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x + 3)^2 - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} = \boldsymbol{\left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2}$$

b. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $\left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 \geq 0$ soit $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) = 0 \iff \dfrac{e^x - 3}{e^x + 3} = 0 \iff e^x - 3 = 0 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3.$

Comme $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$ et $f'(\ln 3) = 0$, on en déduit que **la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{4e^x}{e^x + 3}\right) = -4$ (cf question 1. b.), par somme, on en déduit que :

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
f	$-\infty$	↗	$\ln 3$	↗	$+\infty$

$f(\ln 3) = \ln(3) + 2 - \dfrac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} + 3} = \ln(3) + 2 - \dfrac{4 \times 3}{3 + 3} = \ln(3) + 2 - \dfrac{12}{6} = \ln(3) + 2 - 2 = \ln(3).$

3. a. On a : $f'(x) = 0 \iff x = \ln 3$ (cf question ci-dessus).

Comme $f'(\ln 3) = 0$, alors **la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point I d'abscisse ln3** .

La tangente $\mathcal{D}_2$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse ln3 est donc horizontale.

Par ailleurs, on a : $f(\ln 3) = \ln 3$ donc **l'équation de la tangente $\mathcal{D}_2$ est : $y = \ln 3$.**

b.

* Si $x < \ln 3$, alors puisque la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
$f(x) < f(\ln 3)$ soit $f(x) < \ln 3$, **ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite $\mathcal{D}_2$ sur $]-\infty\,;\ln 3[$.**

* Si $x > \ln 3$, alors puisque la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
$f(x) > f(\ln 3)$ soit $f(x) > \ln 3$, **ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}_2$ sur $]\ln 3\,;+\infty[$.**

* Si $x = \ln 3$, alors **la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_2$ ont un point en commun, le point I(ln3 ; ln3).**

4. a. $\mathcal{D}_3$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$f(0) = 0 + 2 - \dfrac{4 \times 1}{1 + 3} = 2 - 1 = 1$ et $f'(0) = \left(\dfrac{1 - 3}{1 + 3}\right)^2 = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

On en déduit que : $\mathcal{D}_3$: $y = \dfrac{1}{4}x + 1$

b. On doit étudier sur $]-\infty\,;\ln 3]$ le signe de la différence $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$.

La fonction $d : x \longmapsto f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$ est dérivable sur $]-\infty\,;\ln 3]$ comme différence de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\ln 3]$ et $\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\ln 3]$, on a : $d'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{4}$.

La fonction $d' : x \longmapsto f'(x) - \dfrac{1}{4}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\ln 3]$ comme différence de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\ln 3]$ et $\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\ln 3]$, on a : $d''(x) = f''(x)$.

Éléments de correction des exercices du chapitre 11

$\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\ln 3]$, on a :

$$d''(x) = f''(x) = 2 \times \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right) \times \frac{e^x(e^x + 3) - (e^x - 3) \times e^x}{(e^x + 3)^2} = 2 \times \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right) \times \frac{6e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}.$$

$\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\ln 3]$, on a : $12e^x > 0$ et $(e^x + 3)^3 > 0$ et $e^x - 3 \leq 0$. Par quotient, on en déduit que : $f''(x) \leq 0$.

$\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\ln 3]$, on a : $d''(x) \leq 0$, donc la fonction d' est décroissante sur $]-\infty\,;\ln 3]$.

x	$-\infty$	**0**	$\ln 3$
$d''(x)$		$-$	0
$d'(x)$	$\frac{3}{4}$ ↘	**0** ↘	$-\frac{1}{4}$

$d'(\ln 3) = f'(\ln 3) - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ (cours), donc par somme ou différence, on en déduit que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 3) = -3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3) = 3$.

Par quotient, on obtient que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 1$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to -\infty} d'(x) = \frac{3}{4}$.

Enfin : $d'(0) = f'(0) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

Puisque d' est décroissante sur $]-\infty\,;\ln 3]$, on en déduit que :
si $x \leq 0$, alors $d'(x) \geq d'(0)$ soit $d'(x) \geq 0$ et
si $0 \leq x \leq \ln 3$, alors $d'(x) \leq d'(0)$ soit $d'(x) \leq 0$.
Par suite :
puisque $d'(x) \geq 0$ sur $]-\infty\,;0]$, alors d est croissante sur $]-\infty\,;0]$;
puisque $d'(x) \leq 0$ sur $[0\,;\ln 3]$, alors d est décroissante sur $[0\,;\ln 3]$.

x	$-\infty$		0		$\ln 3$
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
d		↗	**0**	↘	

Puisque la fonction d est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et est décroissante sur $[0\,;\ln 3]$, on en déduit que la fonction d admet un maximum en 0 qui vaut $d(0)$.

$d(0) = f(0) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Conclusion : $\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\ln 3]$, on a $d(x) \leq 0$ soit $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + 1\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{4}x + 1$.

Ceci signifie que la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente $\mathcal{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\ln 3]$.

5. VOIR feuille 7.

6. g est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient (de dénominateur non nul) de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on pose : $u(x) = e^x + 3$. On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = e^x$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On en déduit qu'une primitive G de la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \ln|u(x)|$.

Or : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|u(x)| = |e^x + 3| = e^x + 3$ vu que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x + 3 > 0$.

Une primitive G de g sur $\mathbb{R}$ est donc définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \ln(e^x + 3)$.

Éléments de correction des exercices du chapitre 11

5.