ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

FICHE 1 :

EXERCICE N° 1 :

Activité 1 page 20 du LIVRE :

❶ Oui, car sur [- 3 ; 3], la courbe est « en un seul morceau ».

❷ **Non, la fonction est discontinue en 1** car la courbe ne peut pas être tracée sans lever le crayon autour du point d'abscisse 1.

❸ **Non, la fonction est discontinue en 1** car la courbe ne peut pas être tracée sans lever le crayon autour du point d'abscisse 1.

Activité 2 page 21 du LIVRE :

1

1. Sur [0 ; 1[, on a bien : $f(x) = 0$ et sur [1 ; 2[, on a bien $f(x) = 1$.

2. a) E(1) = 1.

b) La fonction E n'a pas pour limite E(1) en 1 car $\lim\limits_{x \to 1\ x < 1} E(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1\ x > 1} E(x) = 1$, donc la fonction E n'admet pas de limite en 1.

3. a) Tracé fait ensemble si besoin. La fonction E est discontinue en 1 ; 2 ; 3 et 4 sur [0 ; 5[.

b) Non car la fonction E n'est pas continue en 4.

2

1. a) La courbe représentant la fonction carré est « en un seul morceau ».

b) On trouve : [0 ; 4] ; [0 ; 4] ; [0 ; 16] ; [0 ; + ∞[et [0 ; + ∞[.

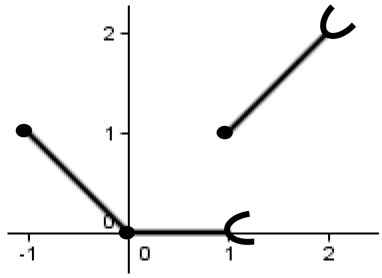
2. On trouve : {0 ; 1}. On n'obtient pas un intervalle.

EXERCICE N° 2 :

1) La courbe C ne peut pas être tracée sans lever le crayon autour du point d'abscisse 1, donc la fonction f est discontinue en 1 et n'est donc pas continue sur l'intervalle [- 3 ; 2].

2) La fonction f est continue sur l'intervalle [1 ; 2] par exemple.

EXERCICE N° 3 :



1) Sur [- 1 ; 0[, on a $f(x) = - x$;

Sur [0 ; 1[, on a $f(x) = 0$ et sur [1 ; 2[, on a $f(x) = x$.

2) Voir ci-contre.

3) Par lecture graphique, la fonction f n'est pas continue en 1, donc elle n'est pas continue sur l'intervalle [- 1 ; 2[.

Par calcul, on trouve que $\lim\limits_{x \to 1\ x < 1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1\ x > 1} f(x) = 1$, donc f n'admet pas de limite en 1.

EXERCICE N° 4 : (*Annabac 2012*) Exercice 1 : (Partie A) pages 203/204.

Correction page 211.

EXERCICE N° 5 : *Extrait de l'épreuve du concours FESIC (mai 2010)*

a. FAUX. On prouve que $\lim\limits_{x \to 0\ x < 0} f(x) = - \infty$ et $\lim\limits_{x \to 0\ x > 0} f(x) = 0$, donc f n'admet pas de limite en 0.

b. VRAI. f est dérivable sur]- ∞ ; 0[et sur]0 ; + ∞[comme somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles) composée et produit de fonctions dérivables sur ces intervalles.

$\forall\ x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}}$. $\forall\ x \neq 0$, on a : $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend bien de celui de x.

c. VRAI. On trouve que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe au voisinage de (- ∞) et au voisinage de (+ ∞).

d. VRAI. On prouve que f est strictement décroissante sur]- ∞ ; 0[et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, alors :

$\forall\ x < 0$, on a : $f(x) < 1$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

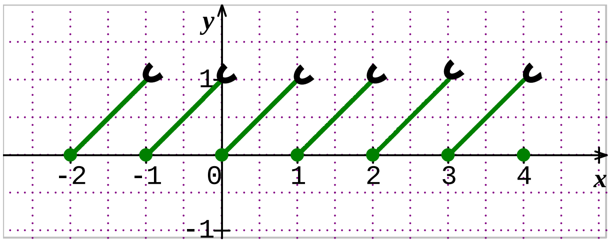
On prouve que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, alors :

$\forall\, x > 0$, on a : $f(x) < 1$. Enfin, $f(0) = 0 < 1$.

EXERCICE N° 6 :

1) On trouve les expressions de *f(x)* suivantes :

$x \in$ …	[- 2 ; - 1[	[- 1 ; 0[	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[
$f(x)$	$x + 2$	$x + 1$	x	$x - 1$	$x - 2$	$x - 3$



2) f est continue sur [0 ; 1[et sur [1 ; 2[comme fonction affine sur chacun de ces intervalles.

Étude de la continuité de f en 1 :

On trouve que $\lim\limits_{x \to 1,\ x<1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1,\ x<1} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1,\ x>1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1,\ x>1} (x-1) = 0$, donc f n'admet pas de limite en 1. La fonction f n'est donc pas continue en 1.

Par suite, la fonction *f* n'est pas continue sur l'intervalle [- 2 ; 4].

EXERCICE N° 7 :

La fonction $x \longmapsto 2x$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et à valeurs dans $]-\infty\,;0[$.

La fonction $X \longmapsto \sin X$ est continue sur $]-\infty\,;0[$.

Par composition, la fonction $x \longmapsto \sin(2x)$ est continue sur $]-\infty\,;0[$.

On prouve de même que la fonction $x \longmapsto \sin(2x)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction $x \longmapsto x$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction f étant le quotient de deux fonctions continues sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas, est donc continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Étude en 0 :

$\forall\, x \neq 0$, on a : $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2x} \times 2$.

On prouve alors que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1$ et par suite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

En posant **L = 2**, on obtient : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ et dans ce cas la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N° 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x - 32}{x - 4}$.

* f est continue sur $]-\infty\,;4[$ et sur $]4\,;+\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur ces intervalles.

* Déterminons la limite en 4 de la fonction f. On obtient une F.I. du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

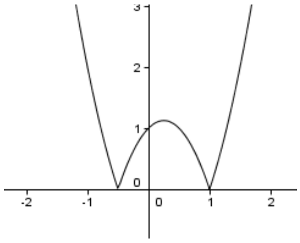
$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, on montre que : $f(x) = x^2 + 4x + 8$.

On trouve que $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + 4x + 8) = 40$ d'où $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 40$.

On peut donc prolonger la fonction *f* par continuité en 4 en posant *f*(4) = 40.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

EXERCICE N° 9 :



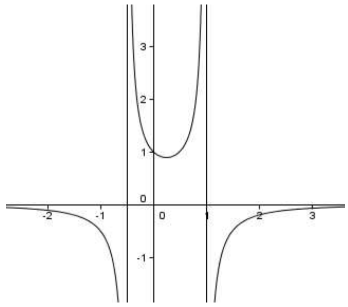
* Représentation ci-contre de la fonction *f* :

u est continue sur ℝ comme fonction polynôme.

La fonction *u* est à valeurs dans $]-\infty\,;\frac{9}{8}]$.

La fonction valeur absolue est continue sur ℝ, donc sur $]-\infty\,;\frac{9}{8}]$.

Par composition, on en déduit que la fonction *f* est continue sur ℝ.



* Représentation ci-contre de la fonction *g* :

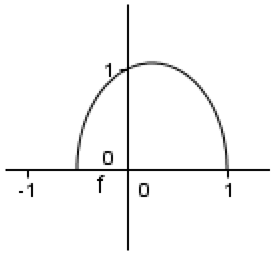
u est continue sur ℝ comme fonction polynôme.

La fonction *u* est à valeurs dans $]-\infty\,;\frac{9}{8}]$

La fonction inverse est continue sur]- ∞ ; 0[et sur]0 ; + ∞[.

La fonction *u* s'annule en $-\frac{1}{2}$ et en 1.

Par composition, on en déduit que la fonction *g* est continue sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$; sur $]-\frac{1}{2}\,;1[$ et sur]1 ; + ∞[.



* Représentation ci-contre de la fonction *h* :

u est continue sur ℝ comme fonction polynôme.

La fonction *u* est à valeurs dans $]-\infty\,;\frac{9}{8}]$

La fonction racine carrée est continue sur [0 ; + ∞[.

La fonction *u* est positive sur $[-\frac{1}{2}\,;1]$.

Par composition, on en déduit que la fonction *h* est continue sur $[-\frac{1}{2}\,;1]$.

EXERCICE N° 10 :

L'équation (E) équivaut à : cos(2*x*) – 2sin(*x*) = - 2 soit à *f(x)* = - 2 où *f* est la fonction définie sur ℝ par : *f(x)* = cos(2*x*) – 2sin(*x*).

* La fonction *f* est continue sur ℝ comme composée, produit et différence de fonctions continues sur ℝ.

* $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$.

Comme $-2\in[-3\,;\frac{3}{2}]$, alors d'après le T.V.I., on en déduit que l'équation *f(x)* = - 2 ou **l'équation (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}]$.**

EXERCICE N° 11 :

À l'aide de la calculatrice (en faisant afficher la fonction sur [- 4 ; 4] par exemple), il semblerait que l'équation *f(x)* = 0 admette une solution comprise entre (- 3) et (- 2).

* *f* est une fonction polynôme, donc *f* est continue sur ℝ.
* *f*(- 3) = - 1 et *f*(- 2) = 2.
Comme $0\in[-1\,;2]$, alors d'après le T.V.I., on en déduit que **l'équation *f(x)* = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle [- 3 ; - 2].**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

FICHE 2 :

EXERCICE N° 1 :

Par lecture du tableau de variations :
* Sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$, la fonction f est strictement décroissante et $f(-2) = -3$. Par suite :
$\forall x \in\ ]-\infty\,;-2]$, on a : $f(x) \geq -3$ et **l'équation $f(x) = -4$ n'a donc pas de solution sur $]-\infty\,;-2]$.**

* Sur l'intervalle $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$, la fonction f est strictement croissante et $f(-2) = -3$. Par suite :

$\forall x \in \left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$, on a : $f(x) \geq -3$ et **l'équation $f(x) = -4$ n'a donc pas de solution sur $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$.**

* Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, la fonction f est continue et strictement décroissante.

On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f établit donc une bijection de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ sur $]-\infty\,;1]$. Comme $-4 \in\ ]-\infty\,;1]$, alors d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Conclusion : L'équation $f(x) = -4$ admet exactement une solution sur $\mathbb{R}$, cette solution appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

EXERCICE N° 2 :

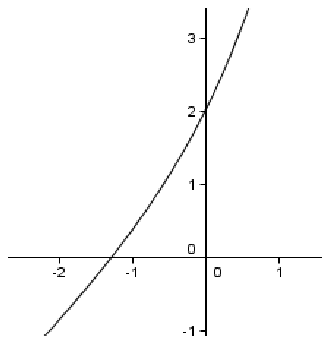
1) * f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$;

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = e^x + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) > 0$, ce qui prouve que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
* On prouve que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

f établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors d'après le théorème de la bijection, on en **déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.**



2) Voir représentation ci-contre.
Il semblerait que α soit compris entre (-2) et (-1).
En faisant un zoom ou en utilisant le tableur de la calculatrice, on effectue un balayage de l'intervalle $[-2\,;-1]$ avec un pas de 0,1 et on obtient : $\mathbf{-1{,}3 < \alpha < -1{,}2}$ ($f(-1{,}3) \approx -0{,}027$ et $f(-1{,}2) \approx 0{,}101$).

3) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\alpha) = 0$. Par suite :
$\forall x \in\ ]-\infty\,;\alpha[$, on a $f(x) < f(\alpha)$ soit $f(x) < 0$ et
$\forall x \in\ ]\alpha\,;+\infty[$, on a $f(x) > f(\alpha)$ soit $f(x) > 0$.

EXERCICE N° 3 :

32 page 46 du LIVRE :

1) a) f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite sur l'intervalle I.
$\forall x \in$ I, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2$.
1) b) f est continue sur I ; strictement croissante sur I ; $f(0) = -2$ et $f(3) = 31$, donc f réalise une bijection de I sur l'intervalle $[-2\,;31]$. Comme $0 \in [-2\,;31]$, par application du théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.
2) a) On prouve que $\lim\limits_{x \to 1,\ x < 1} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1,\ x > 1} g(x) = 3$, par suite g n'admet pas de limite en 1 et la fonction g n'est donc pas continue en 1. Le théorème de la bijection ne peut donc pas être utilisé dans ce cas.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

2) b) On résout $g(x) = 0$:

Sur [0 ; 1[, on trouve $x = \frac{1}{2}$ et comme $\frac{1}{2} \in [0\,;1[$, alors $\frac{1}{2}$ est solution de $g(x) = 0$;

Sur [1 ; 2], on trouve $x = \frac{5}{2}$ et comme $\frac{5}{2} \notin [1\,;2]$, alors $\frac{5}{2}$ n'est pas solution de $g(x) = 0$.

Conclusion : L'équation *g(x)* = 0 admet une unique solution dans J qui est 0,5.

37 page 46 du LIVRE :

* *f* est une fonction polynôme donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$.
Par lecture du tableau de variations, *f* est strictement croissante sur]- ∞ ; 0] ;
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 1$.
f réalise donc une bijection de]- ∞ ; 0] sur]- ∞ ; 1].
Comme $(-1) \in\,]-\infty\,; 1]$, d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = -1$ ou l'équation $f(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle]- ∞ ; 0[.
* De la même façon, on prouve que *f* réalise une bijection de]0 ; 2[sur]- 3 ; 1[et que *f* réalise une bijection de]2 ; + ∞[sur]- 3 ; + ∞[.
D'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = -1$ ou l'équation $f(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle]0 ; 2[et une unique solution sur l'intervalle]2 ; + ∞[.

Conclusion : L'équation *f(x)* + 1 = 0 admet exactement trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

<u>38 page 46 du LIVRE :</u>

1) $f(-1) = -\frac{3}{2}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$.

2) * *f* est une fonction polynôme donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$.
* $0 \in \left]f(-1)\,; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right[$; $0 \in \left]f(0)\,; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right[$ et $0 \in\,]f(0)\,; f(1)[$, donc, d'après le T.V.I., on en déduit qu'il existe au moins un réel α_1 dans $\left]-1\,; -\frac{1}{2}\right[$ tel que $f(\alpha_1) = 0$; au moins un réel α_2 dans $\left]-\frac{1}{2}\,; 0\right[$ tel que $f(\alpha_2) = 0$; au moins un réel α_3 dans]0 ; 1[tel que $f(\alpha_3) = 0$.

Conclusion : L'équation *f(x)* = 0 admet au moins trois solutions réelles distinctes dans l'intervalle [- 1 ; 1].

39 page 46 du LIVRE :

1) On prouve que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2) a) et b) *f* est une fonction polynôme donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3(1 - x)(1 + x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

3) * *f* est une fonction polynôme donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$.
* $f(-2) = 3$ et $f(2) = -1$.
On prouve que *f* réalise une bijection de [- 2 ; - 1] sur [- 1 ; 3] ; une bijection de [- 1 ; 1] sur [- 1 ; 3] et une bijection de [1 ; 2] sur [- 1 ; 3]. Par application du théorème de la bijection successivement sur chacun des intervalles [- 2 ; - 1] ; [- 1 ; 1] et [1 ; 2], on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun de ces intervalles.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

90 page 52 du LIVRE :

1) Réponse c.

On pose $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ pour tout réel x.

* Soit on trouve les racines de $f(x)$, qui sont 1 (racine double) et 3 ;

* Soit on prouve que f réalise une bijection de $]-\infty ; 1]$ sur $]-\infty ; 0]$; une bijection de $[1 ; \frac{7}{3}]$ sur $[-\frac{32}{27} ; 0]$ et une bijection de $[\frac{7}{3} ; +\infty[$ sur $[-\frac{32}{27} ; +\infty[$. On applique ensuite le théorème de la bijection successivement sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1]$; $[1 ; \frac{7}{3}]$ et $[\frac{7}{3} ; +\infty[$ pour en déduire l'existence de deux solutions : l'une commune aux deux premiers intervalles et une sur le 3ème intervalle.

2) Réponse c.

$\forall x > 3$, on a l'encadrement : $\dfrac{2x-1}{x-3} \leq \dfrac{2x+\sin x}{x-3} \leq \dfrac{2x+1}{x-3}$.

Par théorème de comparaison, on prouve que $\lim\limits_{x \to 3\, x > 3} f(x) = +\infty$ et par théorème d'encadrement, on prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

$\forall x < 3$, on a l'encadrement : $\dfrac{2x+1}{x-3} \leq \dfrac{2x+\sin x}{x-3} \leq \dfrac{2x-1}{x-3}$.

Par théorème de comparaison, on prouve que $\lim\limits_{x \to 3\, x < 3} f(x) = -\infty$.

3) Réponses a. ; c. et d.

a) On prouve que : $\forall x \neq 1$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{x-1}$ et par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$.

b) On prouve que : $\forall x \geq 1$, on a : $f(x) - (x-1) = x\sqrt{x-1}\left(1 - \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = +\infty$.

c) On prouve que : $\forall x \neq -1$, $f(x) - (x-1) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1} = \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}$ et par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$.

d) Il est évident que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ dans ce cas particulier.

e) On prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $(+\infty)$.

<u>EXERCICE N° 4 :</u>

Soit f la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = \cos(x) - x$.

* La fonction <u>f est continue</u> sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ en tant que somme de fonctions continues sur cet intervalle.

* La fonction f est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $f'(x) = -\sin(x) - 1$.

Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $0 \leq \sin(x) \leq 1$, d'où : $-2 \leq f'(x) \leq -1 < 0$.

$\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $f'(x) < 0$, ce qui prouve que la fonction <u>f est strictement décroissante</u> sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

* On a : $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

Sous toutes ces conditions, on en déduit que *f* réalise une bijection de $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ sur $[-\frac{\pi}{2}\,; 1]$.

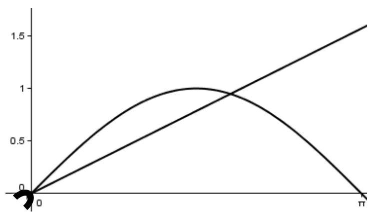
Comme $0 \in [-\frac{\pi}{2}\,; 1]$, alors, d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

Par suite, l'équation (E) admet bien une solution unique α dans $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

* Par balayages successifs avec le tableur de la calculatrice, on obtient :
$f(0) = 1$ et $f(1) \approx -0{,}46$. On a : $f(1) < f(\alpha) < f(0)$ et comme *f* est strictement décroissante sur $[0\,; 1]$, on en déduit : $0 < \alpha < 1$.
Avec le tableur de la calculatrice, on effectue un balayage de l'intervalle $]0\,; 1[$ par pas successifs de 0,1 ; puis de 0,01 et enfin de 0,001.
$f(0{,}7) \approx 0{,}06$ et $f(0{,}8) \approx -0{,}10$ donc $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$;
$f(0{,}73) \approx 0{,}015$ et $f(0{,}74) \approx -0{,}0015$ donc $0{,}73 < \alpha < 0{,}74$;
$f(0{,}739) \approx 1{,}4 \times 10^{-4}$ et $f(0{,}740) \approx -0{,}0015$ d'où : $0{,}739 < \alpha < 0{,}740$.
Conclusion : $\alpha \approx 0{,}739$ à 10^{-3} près par défaut.

EXERCICE N° 5 :

79 page 50 du LIVRE :



1) Représentation ci-contre.

On peut conjecturer que l'équation $\sin x = \frac{1}{2}x$ admet une seule solution dans I.

2) a) *f* est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I. $\forall\, x \in$ I, on a : $f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$. On vérifie : $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

2) b)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	-	
f	**0**	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	↘	$-\frac{\pi}{2}$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on utilise le fait que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0\,; \pi]$.

3) a) On prouve que : $\forall\, x \in\,]0\,;\frac{\pi}{3}]$, on a $f(x) > 0$ donc l'équation $\sin x = \frac{1}{2}x$ n'admet pas de solution sur $]0\,;\frac{\pi}{3}]$. On prouve que *f* établit une bijection de $]\frac{\pi}{3}\,; \pi]$ sur $[-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}[$ et comme $0 \in [-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}[$, on conclut grâce au théorème de la bijection que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\frac{\pi}{3}\,; \pi]$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ ou l'équation $\sin x = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution α sur $]0\,; \pi]$.

3) b) Avec le tableur de la calculatrice, on effectue un balayage de l'intervalle $]\frac{\pi}{3}\,; \pi[$ par pas successifs de 0,1 ; puis de 0,01 ; puis de 0,001 et enfin de 0,0001.
On trouve que : $f(1{,}8954) \approx 7{,}7 \times 10^{-5}$ et $f(1{,}8955) \approx -4{,}7 \times 10^{-6}$ d'où l'encadrement de α de longueur 10^{-4} : $\boxed{1{,}8954 < \alpha < 1{,}8955}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

EXERCICE N° 6 : *Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)*

(A) FAUX. $f(1) = -4$.

On prouve que : $\forall\, x < 1$, on a $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x - 1$ et $\forall\, x > 1$, on a $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{5}{x}$.

On en déduit : $\lim\limits_{x \to 1\, x < 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1\, x > 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 5$ et par suite $f'_g(1) = 0$ et $f'_d(1) = 5$.

Les nombres dérivés de f à droite et à gauche en 1 ne sont égaux, **donc *f* n'est pas dérivable en 1**.

(B) VRAI.

On a prouvé dans la question (A) que $f'_g(1) = 0$. Donc C admet une demi-tangente horizontale à gauche au point I(1 ; - 4).

(C) FAUX.

f est continue et dérivable sur $]-\infty\,;1[$ comme fonction polynôme et on a : $\forall\, x \in\ ]-\infty\,;1[$, $f'(x) = 2x - 2$.
f est continue et dérivable sur $]1\,;+\infty[$ comme fonction rationnelle ne s'annulant pas sur cet intervalle et on a : $\forall\, x \in\ ]1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{5}{x^2}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 1\, x < 1} f(x) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = -4$ et $\lim\limits_{x \to 1\, x > 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1\, x > 1} \dfrac{x - 5}{x} = -4$.

Comme $\lim\limits_{x \to 1\, x < 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1\, x > 1} f(x)$, alors la limite de f en 1 existe et vaut (- 4).

Comme $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -4 = f(1)$, alors la fonction f est continue en 1 et par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

On prouve que f établit une bijection de $]-\infty\,;1]$ sur $[-4\,;+\infty[$ et une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $]-4\,;1[$.
On applique le théorème de la bijection sur chacun des intervalles $]-\infty\,;1]$ et $]1\,;+\infty[$ et on en déduit **deux solutions exactement** à l'équation $f(x) = 0$.
Remarque : on peut aussi résoudre $f(x) = 0$ sur $]-\infty\,;1]$ et sur $]1\,;+\infty[$. On trouve alors S = {- 1 ; 5}.

(D) FAUX.

f est continue en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = -3$, qui n'est pas infinie.

(E) VRAI.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $(+\infty)$.

EXERCICE N° 7 :

75 page 50 du LIVRE :

1) On prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{2x^2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{(x + 1)^2}$.

$\forall\, x \in \left]-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$, on a : $f'(x) > 0$ et $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$.

2)

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$	0	+	||
f	$\mathbf{\frac{27}{4}}$	$\nearrow$	$\mathbf{+\infty}$ ||

3) f est continue sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$ comme fonction rationnelle ne s'annulant pas sur cet intervalle.

f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$. $\qquad f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{27}{4}$ et $\lim\limits_{x \to -1\, x < -1} f(x) = +\infty$.

Donc f établit une bijection de $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$ sur $\left[\dfrac{27}{4}\,;+\infty\right[$ et on a donc $\boldsymbol{f\left(\left[-\frac{3}{2}\,;-1\right[\right) = \left[\frac{27}{4}\,;+\infty\right[}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 7.

Comme $10 \in \left[\frac{27}{4} ; +\infty\right[$, alors d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2} ; -1\right[$.

76 page 50 du LIVRE :

f est une fonction polynôme donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $I = [0 ; 3]$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x - 1)$. On prouve que f établit une bijection de $[0 ; 1]$ sur $[-4 ; -3]$ et une bijection de $[1 ; 3]$ sur $[-4 ; 0]$.
On en déduit que : $\boldsymbol{f(I)} = [-4 ; -3] \cup [-4 ; 0] = \mathbf{[-4 ; 0]}$.

77 page 50 du LIVRE :

On prouve que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ (car $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel x), donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

On prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

On prouve que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

On prouve que f établit une bijection de $]-\infty ; 0]$ sur $[0 ; 1[$ et une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $[0 ; 1[$.

On en déduit : $\boldsymbol{f(\mathbb{R}) = [0 ; 1[}$.