TS **DEVOIR 10 (DM 4) : CORRIGÉ.**

Exercice 1 :

64 page 338 du LIVRE :

$\forall z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

1) Soit le complexe α solution de $P(z) = 0$.

* $P(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha})^4 - 3(\overline{\alpha})^3 + \frac{9}{2}(\overline{\alpha})^2 - 3\overline{\alpha} + 1 = \overline{\alpha^4} - 3\overline{\alpha^3} + \frac{9}{2}\overline{\alpha^2} - 3\overline{\alpha} + 1$

(*propriété 1 : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$*)

$P(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha^4} - \overline{3} \times \overline{\alpha^3} + \overline{\frac{9}{2}} \times \overline{\alpha^2} - \overline{3} \times \overline{\alpha} + \overline{1}$

(propriété 2 : $\overline{z} = z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$)

$P(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha^4} - \overline{3\alpha^3} + \overline{\frac{9}{2}\alpha^2} - \overline{3\alpha} + \overline{1}$

(propriété 3 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$, $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$)

$P(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha^4 - 3\alpha^3 + \frac{9}{2}\alpha^2 - 3\alpha + 1} = \overline{P(\alpha)}$

(propriété 4 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$)

Or, α est solution de $P(z) = 0$, donc $P(\alpha) = 0$ et par suite : $\overline{P(\alpha)} = 0$. On en déduit que : $P(\overline{\alpha}) = 0$.

Conclusion :

Si α est un nombre complexe solution de $P(z) = 0$, alors $\overline{\alpha}$ est aussi solution de $P(z) = 0$.

* *Remarque : 0 n'est pas solution de $P(z) = 0$ car $P(0) = 1$. Donc, si α est solution de $P(z) = 0$, alors α est non nul et par suite $\frac{1}{\alpha}$ existe.*

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1 = \frac{1}{\alpha^4} - 3 \times \frac{1}{\alpha^3} + \frac{9}{2} \times \frac{1}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^3} + \frac{9}{2\alpha^2} - \frac{3}{\alpha} + 1$

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1 - 3\alpha + \frac{9}{2}\alpha^2 - 3\alpha^3 + \alpha^4}{\alpha^4} = \frac{P(\alpha)}{\alpha^4}$.

Or, α est solution de $P(z) = 0$, donc $P(\alpha) = 0$ et par suite : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

Conclusion :

Si α est un nombre complexe solution de $P(z) = 0$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de $P(z) = 0$.

2) $P(1 + i) = (1 + i)^4 - 3 \times (1 + i)^3 + \frac{9}{2} \times (1 + i)^2 - 3 \times (1 + i) + 1$

$P(1 + i) = \left((1 + i)^2\right)^2 - 3 \times (1 + i)(1 + 2i + (-1)) + \frac{9}{2} \times (1 + 2i + (-1)) - 3 - 3i + 1$

$P(1 + i) = (1 + 2i + (-1))^2 - 3(1 + i) \times 2i + \frac{9}{2} \times 2i - 2 - 3i$

$P(1 + i) = (2i)^2 - 6i(1 + i) + 9i - 2 - 3i$

$P(1 + i) = 4 \times (-1) - 6i - 6 \times i^2 + 6i - 2$

$P(1 + i) = -4 - 6i + 6 + 6i - 2 = (-4 + 6 - 2) + i(-6 + 6) = 0 + 0i = 0$

Comme $P(1 + i) = 0$, alors $(1 + i)$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

Conclusion 1 : $(1 + i)$ est solution de $P(z) = 0$.

$(1 + i)$ est solution de P(z) = 0 donc, d'après la question 1), on en déduit que $\overline{(1 + i)}$ et $\dfrac{1}{1 + i}$ sont solutions de P(z) = 0. $\overline{(1 + i)} = 1 - i$ et $\dfrac{1}{1 + i} = \dfrac{1 - i}{1^2 + 1^2} = \dfrac{1 - i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Conclusion 2 : $1 - i$ et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ sont solutions de P(z) = 0.

$(1 - i)$ est solution de P(z) = 0 donc, d'après la question 1), on en déduit que : $\overline{1 - i}$ et $\dfrac{1}{1 - i}$ sont solutions de P(z) = 0.

$\overline{1 - i} = 1 + i$ (solution déjà trouvée) et $\dfrac{1}{1 - i} = \dfrac{1 + i}{1^2 + (-1)^2} = \dfrac{1 + i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ sont solutions de P(z) = 0.

Conclusion 3 : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ est solution de P(z) = 0.

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ est solution de P(z) = 0 donc, d'après la question 1), on en déduit que : $\overline{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}$ et $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}$ sont solutions de P(z) = 0.

$\overline{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ (solution déjà trouvée) et $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i}{\dfrac{1}{2}} = 1 + i$ (solution déjà trouvée) sont solutions de P(z) = 0.

Enfin, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ est solution de P(z) = 0 donc, d'après la question 1), on en déduit que : $\overline{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i}$ et $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i}$ sont solutions de P(z) = 0.

$\overline{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ (solution déjà trouvée)et $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}{\dfrac{1}{2}} = 1 - i$ (solution déjà trouvée) sont solutions de P(z) = 0.

Comme P(z) est de degré 4, alors P(z) admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$. Or, on a trouvé précédemment quatre solutions complexes de P(z) = 0, donc ce sont les seules.

Conclusion finale : $(1 + i)$; $(1 - i)$; $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ sont les solutions de P(z) = 0.

3) Comme $(1 + i)$; $(1 - i)$; $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ sont les solutions de P(z) = 0, alors le polynôme P(z) est factorisable par $(z - (1 + i))$; $(z - (1 - i))$; $\left[z - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)\right]$ et $\left[z - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\right]$.

Il existe donc a appartenant à $\mathbb{C}$ tel que :

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - (1 + i)) \times (z - (1 - i)) \times \left[z - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)\right] \times \left[z - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\right]$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z^2 - (1 - i)z - (1 + i)z + (1 + i)(1 - i)) \times \left[z^2 - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)z - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\right]$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z^2 - z + iz - z - iz + 1 - i^2)\left(z^2 - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}iz - \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}iz + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i^2\right)$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z^2 - 2z + 1 + 1)\left(z^2 - z + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\right)$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z^2 - 2z + 2)\left(z^2 - z + \dfrac{1}{2}\right)$

Enfin, comme le coefficient du terme z^4 dans P(z) vaut 1, alors nécessairement a vaut 1. D'où :

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 - 2z + 2)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)$ ce qui donne l'expression de P(z) sous forme d'un produit de deux polynômes $P_1(z)$ et $P_2(z)$ du second degré à coefficients réels :

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P_1(z) = z^2 - 2z + 2$ et $P_2(z) = z^2 - z + \frac{1}{2}$.

73 page 339 du LIVRE.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ et on on considère les points M_n d'affixe z_n tel que : $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1)

* $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}i \times z_n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n$.

*** On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, la proposition P(n) : "$z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \times z_0$".**

Démontrons P(n) par récurrence sur n.

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $\left(\frac{1}{2}i\right)^0 \times z_0 = 1 \times z_0 = z_0$ ce qui prouve la proposition au rang $n = 0$.

Hérédité :

On suppose que la proposition P(n) est vérifiée pour un entier n appartenant à $\mathbb{N}$.
Démontrons qu'alors la proposition est vérifiée au rang (n + 1).

Hypothèse de récurrence : $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \times z_0$ pour un entier n appartenant à $\mathbb{N}$.

D'après le résultat ci-dessus, on a : $z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n$

On en déduit, grâce à l'hypothèse de récurrence que : $z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n \times z_0 = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} \times z_0$.

Ce qui prouve la proposition P(n + 1).

Conclusion : la proposition est vraie au rang n = 0 et il y a hérédité, donc la proposition P(n) est vraie pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \times z_0$.

* $z_1 = \frac{1}{2}i(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \times i^2 \times \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Conclusion 1 : $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ sous forme algébrique.

$|z_1| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$

Soit $\alpha_1 = \arg(z_1)$. On a : $\cos(\alpha_1) = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha_1) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$. D'où :

$\cos(\alpha_1) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin(\alpha_1) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

On en déduit :

Conclusion 1 bis : $z_1 = 1\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ sous forme trigonométrique.

On a : $z_2 = \frac{1}{2}i \times z_1 = \frac{1}{2}i \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Conclusion 2 : $z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ sous forme algébrique.

$|z_2| = \left|\frac{1}{2}i \times z_1\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |i| \times |z_1| = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ (d'après la propriété sur le module d'un produit de nombres complexes). Soit $\alpha_2 = \arg(z_2)$. On a : $\cos(\alpha_2) = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_2) = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où :

$\cos(\alpha_2) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\sin(\alpha_2) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

On en déduit :

Conclusion 2 bis : $z_2 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$ sous forme trigonométrique.

On a : $z_3 = \frac{1}{2}i \times z_2 = \frac{1}{2}i \times \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) = -\frac{1}{8}i + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$.

Conclusion 3 : $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$ sous forme algébrique.

$|z_3| = \left|\frac{1}{2}i \times z_2\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |i| \times |z_2| = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (d'après la propriété sur le module d'un produit de nombres complexes). Soit $\alpha_3 = \arg(z_3)$. On a : $\cos(\alpha_3) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha_3) = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$. D'où :

$\cos(\alpha_3) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin(\alpha_3) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

On en déduit :

Conclusion 3 bis : $z_3 = \frac{1}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ sous forme trigonométrique.

On a : $z_4 = \frac{1}{2}i \times z_3 = \frac{1}{2}i \times \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}i + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$.

Conclusion 4 : $z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$ sous forme algébrique.

$|z_4| = \left|\frac{1}{2}i \times z_3\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |i| \times |z_3| = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ (d'après la propriété sur le module d'un produit de nombres complexes). Soit $\alpha_4 = \arg(z_4)$. On a : $\cos(\alpha_4) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_4) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où :

$\cos(\alpha_4) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin(\alpha_4) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

On en déduit :

Conclusion 4 bis : $z_4 = \frac{1}{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ sous forme trigonométrique.

2) M_0 a pour affixe : $z_0 = \left(\frac{1}{2}i\right)^0 \times (1 + i\sqrt{3}) = 1 \times (1 + i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$.

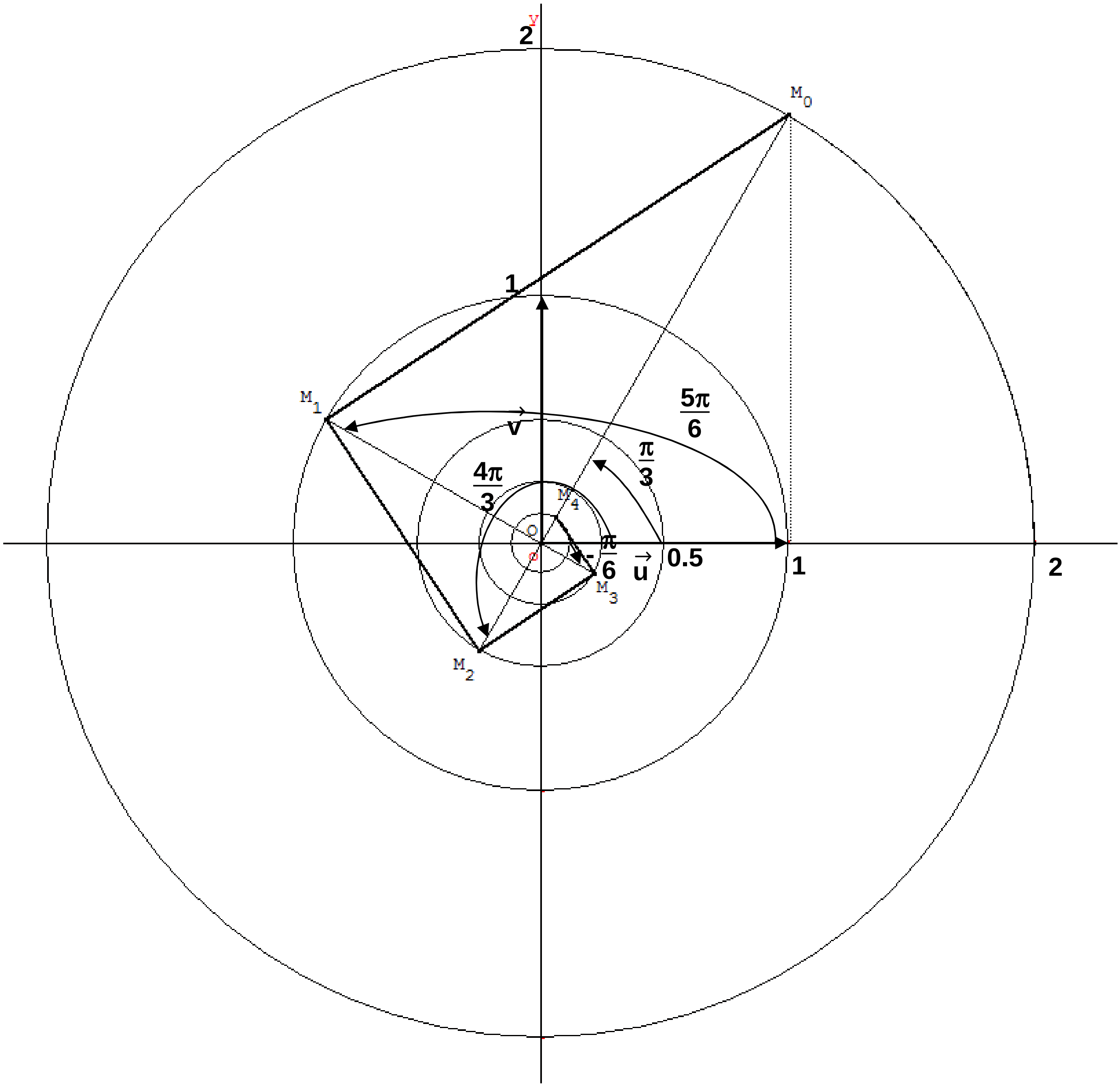
$|z_0| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$.

Soit $\alpha_0 = \arg(z_0)$. On a : $\cos(\alpha_0) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où : $\cos(\alpha_0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin(\alpha_0) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

On en déduit : $\boldsymbol{z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}$ **sous forme trigonométrique.**

Conclusion : le point M_0 a pour coordonnées polaires $\left[2 ; \frac{\pi}{3}\right]$; le point M_1 a pour coordonnées polaires $\left[1 ; \frac{5\pi}{6}\right]$; le point M_2 a pour coordonnées polaires $\left[\frac{1}{2} ; \frac{4\pi}{3}\right]$; le point M_3 a pour coordonnées polaires $\left[\frac{1}{4} ; -\frac{\pi}{6}\right]$ et le point M_4 a pour coordonnées polaires $\left[\frac{1}{8} ; \frac{\pi}{3}\right]$.

Attention à l'unité : 4 cm ici !!!



3) $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$\text{OM}_n = |z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n \times z_0\right| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right| \times |\mathbf{z_0}| = \left|\frac{1}{2}i\right|^n \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |\,i\,|^n \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1^n \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 \times 2$

$\mathbf{OM}_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2^n} \times 2 = \mathbf{\frac{1}{2^{n-1}}}$

4) a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$\text{M}_n\text{M}_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1}{2}iz_n - z_n\right|$ car : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n$ d'après la question 1).

$\text{M}_n\text{M}_{n+1} = \left|z_n\left(\frac{1}{2}i - 1\right)\right| = |z_n| \times \left|-1 + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{\frac{5}{4}}$

$\mathbf{M}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{M}_{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{5}}{2^{\boldsymbol{n}}}}$

4) b)

* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\text{L}_n = \sum_{k=0}^{n} \text{M}_k\text{M}_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{5}}{2^k}$ d'après le résultat de la question 4) a).

$\text{L}_n = \sqrt{5} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sqrt{5} \times 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$ car : $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour tout réel $q \neq 1$.

$\mathbf{L}_{\boldsymbol{n}} = \sqrt{5} \times 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \times 2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \mathbf{2\sqrt{5}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}+1}\right]}$.

* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car on a : $-1 < \frac{1}{2} < 1$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.

Par somme et par produit, on en déduit que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 1$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\sqrt{5}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2\sqrt{5}$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{L}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{2\sqrt{5}}$**.**

Exercice 2 : ***Extrait du TP3 (Boucles et itérateurs en algorithmique).***

a)

Variables : *N* (entier positif) et *S* (réel positif)
Début de l'algorithme
N prend la valeur 0
S prend la valeur 5000
Tant que *S* est strictement inférieur à 8000
    S prend la valeur *S* × 1,02
    N prend la valeur *N* + 1
Fin Tant que
Afficher *N*
Afficher *S*
Fin de l'algorithme

Version modifiée :
Variables : *N* (entier positif) et *S ; C* (réels positifs)
Début de l'algorithme
Entrer *S*
C prend la valeur *S*
Tant que *C* < 2 × S
    C prend la valeur *C* × 1,02
    N prend la valeur *N* + 1
Fin Tant que
Afficher *N*
Afficher *C*
Fin de l'algorithme

b) Programme codé sur AlgoBox :

```
VARIABLES
    N EST_DU_TYPE NOMBRE
    S EST_DU_TYPE NOMBRE
    C EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE S
    C PREND_LA_VALEUR S
    TANT_QUE (C<2*S) FAIRE
            DEBUT_TANT_QUE
            C PREND_LA_VALEUR 1.02*C
            N PREND_LA_VALEUR N+1
            FIN_TANT_QUE
    AFFICHER "On teste l'algorithme pour une somme placée de "
    AFFICHER S
    AFFICHER " euros."
    AFFICHER "Au bout de "
    AFFICHER N
    AFFICHER " semestres, la somme S a au moins doublé et vaut "
    AFFICHER C
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

Algorithme lancé
On teste l'algorithme pour une somme placée de 1000 euros.
Au bout de 36 semestres, la somme S a au moins doublé et vaut 2039.8873
Algorithme terminé

QUESTION NON DEMANDÉE MAIS RÉSULTAT INTÉRESSANT !

c) On remarque que *N* vaut 36, quelle que soit la valeur de *S* entrée.

Preuve avec le logiciel AlgoBox de $N = 36$:

Algorithme :

Variable : *N* (entier positif)
Début de l'algorithme
Tant que $1{,}02^{N} < 2$
    N prend la valeur *N* +1
Fin Tant que
Afficher *N*
Fin de l'algorithme

Programme codé sur AlgoBox :

```
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
TANT_QUE (pow(1.02,N)<2) FAIRE
DEBUT_TANT_QUE
N PREND_LA_VALEUR N+1
FIN_TANT_QUE
AFFICHER "On trouve que N vaut "
AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

Algorithme lancé
On trouve que N vaut 36

Exercice 3 : ***Algorithme de dichotomie***

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3 + 2x - 2$.
Le but de l'exercice est de concevoir un algorithme permettant de trouver une valeur approchée de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ à la précision p.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	- 2	- 1	0	1	2	3
$f(x)$	- 14	- 5	- 2	1	10	31

b)

* **<u>La fonction f est dérivable sur ℝ</u>** comme fonction polynôme et on a :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2$.

* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) > 0$, ce qui prouve que la fonction **<u>f est strictement croissante sur ℝ</u>.**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

* **<u>$0 \in f(]-\infty\,;+\infty[)$</u> $= \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\,;\,\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[=]-\infty\,;+\infty[$.**

Sous toutes ces conditions, on en déduit, d'après le théorème de la bijection, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur ℝ.

Enfin, on remarque que $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, donc : $f(0) < f(x_0) < f(1)$.

Comme f est strictement croissante sur ℝ, on en déduit que : $0 < x_0 < 1$.

Conclusion : $x_0 \in\,]0\,;1[$ et a fortiori : $x_0 \in [0\,;1]$.

c) $f(a) = f(0) = -2$; $f(b) = f(1) = 1$ et $f(m) = f(0,5) = -0,875$.

On constate que $f(0) < 0$; $f(1) > 0$ et $f(0,5) < 0$. Comme $f(x_0) = 0$, alors : $f(0,5) < f(x_0) < f(1)$.

Comme f est strictement croissante sur ℝ, on en déduit que : $0,5 < x_0 < 1$.

Conclusion : $x_0 \in\,]0,5\,;1[$ et a fortiori $x_0 \in [0,5\,;1]$.

d)

Algorithme :

Variables : a ; b ; m et p
Début de l'algorithme
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1
Lire p
Tant que $(b - a) > p$
    m prend la valeur $\dfrac{a + b}{2}$
    Si $f(a) \times f(m) > 0$ **Alors**
        a prend la valeur m
        Sinon b prend la valeur m
    FinSi
Fin Tant que
Afficher a
Afficher b
Fin de l'algorithme

Programme codé sur AlgoBox (avec quelques messages en plus pour enjoliver la présentation) :

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
m EST_DU_TYPE NOMBRE
p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    a PREND_LA_VALEUR 0
    b PREND_LA_VALEUR 1
    LIRE p
    TANT_QUE ((b-a)>p) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        m PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
        SI (F1(m)*F1(a)>0) ALORS
            DEBUT_SI
            a PREND_LA_VALEUR m
            FIN_SI
            SINON
            DEBUT_SINON
            b PREND_LA_VALEUR m
            FIN_SINON
        FIN_TANT_QUE
    AFFICHER "Pour une précision p valant "
    AFFICHER p
    AFFICHER ", on trouve que la solution x0 est comprise entre "
    AFFICHER a
    AFFICHER " et "
    AFFICHER b
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=pow(x,3)+2*x-2
```

RÉSULTATS :

Algorithme lancé

Pour une précision p valant 0.0001, on trouve que la solution x_0 est comprise entre 0.77087402 et 0.77093506

Algorithme terminé