FICHE ÉLÉMENTS DE RÉPONSES DU CHAPITRE 9

FICHE 1 :

EXERCICE I :
6 page 177 du LIVRE :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^n$. On a : $2^{49} < 10^{15} < 2^{50}$. Donc à partir de l'indice $n = 50$, on a : $u_n > 10^{15}$.

EXERCICE II : u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.
1) À partir du rang $n_0 = 1000$, on a $u_n \geq 10^6$.
2) Soit A est un réel positif.
Pour tout $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$ soit $u_n > A$. L'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0 (plus petit entier supérieur à $\sqrt{A}$).
Par définition, on en déduit que la suite u tend vers $(+\infty)$.

EXERCICE III : v est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

1) a) $v_n \in\ ]1{,}99\,;2{,}01[\Leftrightarrow 1{,}99 < 2 + \dfrac{1}{n^2} < 2{,}01 \Leftrightarrow -0{,}01 < \dfrac{1}{n^2} < 0{,}01$
Donc : $n^2 > 100$ soit $n > 10$. À partir du rang 11, on a : $v_n \in\ ]1{,}99\,;2{,}01[$.
b) $v_n \in\ ]1{,}999\,;2{,}001[\Leftrightarrow 1{,}999 < 2 + \dfrac{1}{n^2} < 2{,}001 \Leftrightarrow -0{,}001 < \dfrac{1}{n^2} < 0{,}001$
Donc : $n^2 > 1000$ soit $n > \sqrt{1000}$. À partir du rang 32, on a : $v_n \in\ ]1{,}999\,;2{,}001[$.

2) Soit I un intervalle ouvert contenant 2. On peut écrire I sous la forme $]2-\beta\,;2+\alpha[$ avec $\beta > 0$ et $\alpha > 0$.
Pour tout $n > \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$,on a : $n^2 > \dfrac{1}{\alpha}$ et $0 < \dfrac{1}{n^2} < \alpha$ c'est-à-dire $2 < v_n < 2 + \alpha$.
Donc à partir du rang n_0 (plus petit entier supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$), tous les termes v_n sont contenus dans l'intervalle I. Par définition, on en déduit que la suite v converge vers 2.

EXERCICE IV : u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right]$.
1) $u_0 = 0$; $u_1 = -1$; $u_2 = 4$; $u_3 = -9$; $u_4 = 16$; $u_5 = -25$.
2) Pour $n = 1\,000$, $u_{1\,000} = 10^6$ donc $u_{1\,000} \geq 10^6$ et pour $m = 1\,001$, $u_{1\,001} = -1001^2$ donc $u_{1\,001} \leq -10^6$.
3) La suite u n'a pas de limite, elle diverge.

EXERCICE V :
Partie A (démonstration de cours)
u est une suite croissante non majorée.
1) Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geq M$.
La suite u est croissante donc si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq u_{n_0}$
Or, $u_{n_0} \geq M$ donc : pour tout $n \geq n_0$, on a : $u_n \geq M$.
2) L'intervalle $[M\,;+\infty[$ contient donc tous les termes de la suite à partir du rang n_0 et, d'après la définition, la suite u a donc pour limite $+\infty$.
3) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Partie B
1) Faux. La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n(-1)^n$, est non majorée et pourtant elle n'a pas de limite.
2) Faux. La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ est croissante et pourtant, elle a pour limite 2.
3) Vrai. Puisque la suite tend vers $(+\infty)$, alors :
Pour tout réel M, l'intervalle $]M\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0.

Donc pour tout réel M, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > M$. Ceci prouve que la suite u n'est pas majorée.

4) Faux. La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2}n + \sin(n)$, tend vers $+\infty$ (théorème de comparaison) et pourtant, elle n'est pas croissante.

EXERCICE VI :

4 page 177 du LIVRE : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$.

26 page 178 du LIVRE :

1) a) On prouve que (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1^er^ terme $v_0 = 6$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \frac{2}{3^{n-1}}$ et $u_n = \frac{2}{3^{n-1}} - 3$.

2) a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n = 9\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ et $S'_n = 9\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - 3n - 3$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n) = 9$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (S'_n) = -\infty$.

28 page 178 du LIVRE :

a) On trace les droites d'équation : $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x - 3$.

(u_n) semble décroissante et de limite (-6).

b) On trace les droites d'équation : $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

(u_n) ne semble pas monotone : (u_{2n}) décroît et (u_{2n+1}) croît.
(u_n) semble converger vers 0.

Remarque : ceci est confirmé par le fait que (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

c) On trace les droites d'équation : $y = x$ et $y = x + 2$.
(u_n) semble croissante et semble diverger vers $(+\infty)$.
Remarque : ceci est confirmé par le fait que (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

67 page 183 du LIVRE :

1) On prouve que (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de 1^er^ terme $v_0 = 1$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -3$.

4) a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 3n - 3$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n) = -\infty$.

EXERCICE VII : u est une suite telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait : $2 - \frac{1}{n} \le u_n \le 2 + \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$.

Par le théorème des « gendarmes » relatif aux suites, on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$.

EXERCICE VIII :

8 page 177 du LIVRE : $\forall\, n \ge 1$, on a : $-1 \le \cos(2n) \le 1$ d'où l'encadrement demandé en divisant tous les membres par $\sqrt{n}$ (qui est strictement positif).

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$, alors, par le théorème des « gendarmes » relatif aux suites, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

64 page 182 du LIVRE :

1) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

3) $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 5$ et $u_4 = 26$.

On démontre la proposition par récurrence sur n avec $n \geq 4$.

(On obtient : $u_{n+1} \geq 2^{2n} + 1$. Or, $2^{2n} + 1 = 2^{n+1}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1$).

4) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (théorème de comparaison).

66 page 182 du LIVRE (LIBAN juin 2004) :

1) a) La propriété est évidemment vérifiée au rang k.

En supposant vraie la propriété pour un rang n (tel que $n \geq k$), on obtient :

$\frac{k^{n+1}}{(n+1)\,!} < \frac{k^n}{n\,!}$ car $n + 1 > n$ et $n \geq k$.

On utilise ensuite l'hypothèse de récurrence : $\frac{k^n}{n\,!} \leq \frac{k^k}{k\,!}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k$, on a : $\frac{x^n}{n\,!} = \frac{k^n}{n\,!} \times \left(\frac{x}{k}\right)^n$ et on utilise le résultat de a).

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k$, on a : $0 \leq \frac{x^n}{n\,!} \leq \frac{k^k}{k\,!} \times \left(\frac{x}{k}\right)^n$.

Or, $k > x \geq 0$, donc $0 \leq \frac{x}{k} < 1$ et par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$.

Par théorème d'encadrement sur les suites, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n\,!} = 0$.

2) a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a : $\frac{n^{n-1}}{n\,!} = \frac{n}{n} \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n-2} \times \ldots \times \frac{n}{2} \times \frac{1}{1}$.

Tous les facteurs du produit étant supérieurs ou égaux à 1, on en déduit que : $\frac{n^{n-1}}{n\,!} \geq 1\ \forall\ n \geq 2$.

b) $\frac{n^n}{n\,!} = n \times \frac{n^{n-1}}{n\,!}$. Donc : $\forall\ n \geq 2$, on a $\frac{n^n}{n\,!} \geq n$ d'après 2) a).

Par théorème de comparaison, on conclut : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n\,!} = +\infty$.

73 page 184 du LIVRE :

1) On démontre la propriété par récurrence sur n ($n \geq 1$).

2) * $\forall\ n \geq 1$, on obtient : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$.

* On démontre la propriété par récurrence sur n ($n \geq 1$) en utilisant l'égalité précédente.

3) * Pas de difficulté : on peut partir du 2nd membre et développer. On obtient donc :

$\forall\ n \geq 1$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

* En utilisant le 2ème résultat de la 2ème question, on obtient : $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.

On démontre ensuite que $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$ par récurrence sur n.

4) D'après les questions 2) et 3), on en déduit que :

$\forall\, n \geq 1$, on a : $0 < u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2^n}$.

Par théorème d'encadrement, on conclut : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

EXERCICE IX :

1) Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$.
La suite u diverge vers $(+\infty)$ (théorème de comparaison) et pourtant, elle n'est pas croissante.

2) Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 - \dfrac{1}{2n}$.

La suite u est strictement croissante et pourtant, elle converge vers 3.

3) Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sin(n)$.

La suite u est bornée ($\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq u_n \leq 1$) et pourtant elle n'a pas de limite.

4) Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $u_n < 1 < 2$.

La suite u est croissante et majorée par 2. Pourtant, la suite u converge vers 1.

5) Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4 \times (-1)^n$.
La suite u prend alternativement les valeurs 4 et (- 4).
La suite u n'a donc pas de limite et tous ses termes sont non nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{4 \times (-1)^n}$.

La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ prend alternativement les valeurs $\dfrac{1}{4}$ et $\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, donc elle ne converge pas.

6) Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}99 + \dfrac{1}{n+1}$.

$\forall\, n \geq 99$, on a : $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 0{,}01$ et par suite : $0{,}99 < u_n \leq 1 < 1{,}01$.

À partir du rang 99, on a $u_n \in \,]0{,}99\,;\,1{,}01[$ et pourtant, la suite u converge vers 0,99.

EXERCICE X :
7 page 44 du LIVRE : voir corrigé dans le livre page 468.

EXERCICE XI :
Soit A un réel quelconque (on peut supposer $A \geq 0$ car, sinon, $g(x) = \sqrt{x} \in \,]A\,;\,+\infty[$ est toujours vérifié).
$g(x) \in \,]A\,;\,+\infty[\;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} \in \,]A\,;\,+\infty[\;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} > A \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x > A^2$

L'intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient donc toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand (ici on doit avoir $x > A^2$).

Par définition, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

EXERCICE XII :
<u>**8 page 44 du LIVRE :**</u> $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ par quotient.

Pour $x \neq 1$, $f(x) > 10^3 \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{(x-1)^2} > 1000 \Leftrightarrow 0 > 1000x^2 - 2005x + 1001$

On trouve $\Delta = 16025$ et on obtient : $\dfrac{401 - \sqrt{641}}{400} < x < \dfrac{401 + \sqrt{641}}{400}$

On peut prendre : $0{,}94 < x < 1{,}06$ et α vaut 0,06 dans ce cas.

FICHE ÉLÉMENTS DE RÉPONSES DU CHAPITRE 9

9 page 44 du LIVRE : $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 4$. On peut supposer $x > 3$ car x est proche de 5.

$3{,}95 < f(x) < 4{,}05 \Leftrightarrow 3{,}95 < \dfrac{x+3}{x-3} < 4{,}05 \Leftrightarrow 2{,}95x < 14{,}85$ et $15{,}15 < 3{,}05x$

On peut prendre : $4{,}97 < x < 5{,}03$ et α vaut 0,03 dans ce cas.

EXERCICE XIII :

1) Il semble que lorsque x est proche de 2, $f(x)$ soit proche de 3.

2) a) $f(x) \in [2{,}9 ; 3{,}1] \Leftrightarrow 2{,}9 \leq f(x) \leq 3{,}1 \Leftrightarrow 0{,}9 \leq (x-1)^2 \leq 1{,}1 \Leftrightarrow \sqrt{0{,}9} \leq x - 1 \leq \sqrt{1{,}1}$

On peut prendre : $0{,}95 \leq x - 1 \leq 1{,}04$ soit $x \in [1{,}95 ; 2{,}04]$.

b) $f(x) \in [2{,}99 ; 3{,}01] \Leftrightarrow 2{,}99 \leq f(x) \leq 3{,}01 \Leftrightarrow 0{,}99 \leq (x-1)^2 \leq 1{,}01 \Leftrightarrow \sqrt{0{,}99} \leq x - 1 \leq \sqrt{1{,}01}$

On peut prendre : $0{,}995 \leq x - 1 \leq 1{,}004$ soit $x \in [1{,}995 ; 2{,}004]$.

3) a) $f(x) \in [3 - r ; 3 + r] \Leftrightarrow 3 - r \leq f(x) \leq 3 + r \Leftrightarrow 1 - r \leq (x-1)^2 \leq 1 + r \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 - r} \leq x \leq 1 + \sqrt{1 + r}$.

$x \in [1 + \sqrt{1 - r} ; 1 + \sqrt{1 + r}]$ (cet intervalle contient 2).

b) r peut être choisi aussi petit que l'on veut, donc tout intervalle ouvert contenant 3 contient les valeurs $f(x)$ pourvu que x soit assez proche de 2. Par définition, on en déduit que f admet 3 pour limite quand x tend vers 2.

EXERCICE XIV :

11 page 44 du LIVRE : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$. $\lim\limits_{\substack{x \to (-1) \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to (-1) \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

La courbe représentative de f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -2$ au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

La courbe représentative de f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = -1$.

$\forall x \neq -1$, on a : $f(x) - (-2) = \dfrac{2}{x+1}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $f(x) - (-2)$	$-$	||	$+$
Position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = -2$	La courbe est en dessous de l'asymptote.	||	La courbe est au-dessus de l'asymptote.

92 page 52 du LIVRE :

1) **FAUX.**

Si $\Delta : y = x - 3$ est asymptote à C au voisinage de $(-\infty)$, alors on a :

$f(x) = x - 3 + h(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2) **FAUX**. C peut admettre une asymptote horizontale en $(-\infty)$.

Ex : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x < 0$ et $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x^2 + 1}$ si $x \geq 0$. C admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$ et la droite Δ comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$.

3) **FAUX**. C peut admettre Δ comme asymptote au voisinage de $(-\infty)$.

EXERCICE XV :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

$f'(x) < 0$ sur $]-1 ; 1[$, donc f strictement décroissante sur $]-1 ; 1[$ et par suite, f n'est pas croissante su $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2} + 1 = x - |x| + 1$.
$\forall x \leq 0$, on a : $f(x) = 2x + 1$ et $\forall x \geq 0$, on a : $f(x) = 1$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

3) Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$.
$f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, et f n'est pas positive sur $[0 ; +\infty[$.

(En fait, f est négative sur $[0 ; 2]$ et positive sur $[2 ; +\infty[$).

4) Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 - \frac{1}{n}$.

u est strictement croissante. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 3$.

e) Soit u la suite définie par $u_n = \frac{1}{2}n + \sin(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

u tend vers $+\infty$ (théorème de comparaison) et pourtant, elle n'est pas croissante.

EXERCICE XVI :
19 page 45 du LIVRE :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et si $x > -1$ alors $x + 1 > 0$, donc on peut diviser les membres de l'encadrement précédent par $(x + 1)$ sans rien changer. On obtient alors :
$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ pour tout $x > -1$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) = 0$, donc par théorème d'encadrement sur les fonctions, on en déduit que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE XVII :
1) Pour tout réel x, on a : $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on en déduit : pour tout réel x on a : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$.

2) a) Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\frac{x}{2 + \sin x} \geq \frac{x}{3}$ d'après la question précédente, soit $f(x) \geq \frac{x}{3}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{3}\right) = +\infty$, donc, par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour tout réel $x \leq 0$, on a : $\frac{x}{2 + \sin x} \leq \frac{x}{3}$ d'après la question précédente, soit $f(x) \leq \frac{x}{3}$.

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{3}\right) = -\infty$, donc, par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

3) a) Pour tout réel $x > 0$, on a : $\frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin x}{x}$ d'après la question 1), soit $\frac{1}{x} \leq g(x)$.

Or, $\lim\limits_{x \to 0\, x > 0} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$, donc, par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0\, x > 0} g(x) = +\infty$.

b)Pour tout $x < 0$,on a : $\frac{1}{x} \geq \frac{2 + \sin x}{x}$ d'après la question 1), soit $g(x) \leq \frac{1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to 0\, x < 0} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$, donc, par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0\, x < 0} g(x) = -\infty$.

FICHE ÉLÉMENTS DE RÉPONSES DU CHAPITRE 9

FICHE 2 :

EXERCICE I : *Annabac 2012 :*

Exercice 1 pages 109//110 : correction pages 115/116/117.
Exercice 10 page 241 : correction pages 253/254.
Exercice 3 page 272 : correction pages 272/…/275.

EXERCICE II :

49 page 48 du LIVRE :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $1 \leq 3 + 2\sin x \leq 5$. Pour tout x, on en déduit que : $\dfrac{x^2}{5} \leq \dfrac{x^2}{3 + 2\sin x} \leq x^2$ et par théorème de comparaison : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{3 + 2\sin x} = +\infty$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$. D'après a) : $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{3 + 2\sin x} \leq 1$.

On s'intéresse à la limite en $(+\infty)$ de $\dfrac{x + \sin x}{3 + 2\sin x}$, donc on peut supposer $x > 1$.

$\forall\, x > 1$, on a : $\dfrac{x + \sin x}{3 + 2\sin x} \geq \dfrac{x + \sin x}{5} \geq \dfrac{x - 1}{5}$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin x}{3 + 2\sin x} = +\infty$.

<u>**45 page 48**</u> **du LIVRE :**

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. $\lim\limits_{x \to 2\ x < 2} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2\ x > 2} f(x) = -\infty$.

En $x = -2$, on obtient une F.I. : « $\dfrac{0}{0}$ ». On montre que : $\forall\, x \neq -2$ et $\forall\, x \neq 2$, on a : $f(x) = \dfrac{x - 6}{x - 2}$.

D'où : $\lim\limits_{x \to (-2)} f(x) = 2$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x \to -2\ x < -2} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2\ x > -2} f(x) = +\infty$.

En $x = 1$, on obtient une F.I. : « $\dfrac{0}{0}$ ». On montre que : $\forall\, x \neq -2$ et $\forall\, x \neq 1$, on a : $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 2}$.

D'où : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{4}{3}$.

EXERCICE III :

<u>**65 page 49**</u> **du LIVRE :**

On trouve : $\forall\, x \neq 1$, $f(x) = x - 2 + \dfrac{-1}{x - 1}$.

$\forall\, x \neq 1$, on a : $f(x) - (x - 2) = \dfrac{-1}{x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-1}{x - 1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{x - 1}\right) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à C au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 1\ x < 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1\ x > 1} f(x) = -\infty$, ce qui prouve que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à C_f.

66 page 49 du LIVRE : On trouve : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{-2x + 1}{x^2 + 2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+2}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2+2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2+2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x)] = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

72 page 49 du LIVRE :

$\forall x \neq -1$, on a : $f(x) - (-2x^2) = \dfrac{1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-2x^2)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-2x^2)] = 0$, ce qui prouve que la parabole P d'équation $y = -2x^2$ est asymptote à C au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $f(x) - (-2x^2)$	$-$	‖	$+$
Position de la courbe représentative de f par rapport à la parabole P d'équation $y = -2x^2$	La courbe est en dessous de la parabole P.	‖	La courbe est au-dessus de la parabole P.

EXERCICE IV :

17 page 45 du LIVRE :

Dans chaque cas, l'écriture de $f(x)$ ne permet pas de conclure. On utilise l'expression conjuguée.

a) On écrit : $\forall x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$ et on obtient par quotient : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-}$.

b) On écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ et on obtient par quotient : $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+}$.

48 page 48 du LIVRE :

a) $D_f = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x$.
Par théorème de comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $D_f =]1 ; +\infty[$.
$\forall x > 1$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 1,\ x > 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

<u>**57 page 48**</u> **du LIVRE :** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1}{x^2} = -\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = -\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x \to 0} X = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1^2 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ par produit.

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{1-\cos x}\right) = 2$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, alors $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2}$ **par produit**.

<u>58 page 48</u> du LIVRE :

$D_f = \left[\frac{2}{3} ; 2\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$.

On obtient avec la présente forme de *f(x)* une F.I. : « $\frac{0}{0}$ ».

On prouve que $f(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$.

On obtient alors : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\frac{9}{4}$.

EXERCICE V :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$, on a : $\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2+x-1}{x-2}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{x^2+x-1}{x-2}\right] = -1$.

2) Pour tout $x \geq 0$ et $x \neq 4$, on a : $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$.

3) Pour tout $x \geq -4$ et $x \neq 0$, on a : $\frac{x}{\sqrt{4+x}-2} = \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{(4+x)-4} = \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{x} = \sqrt{4+x}+2$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{4+x}+2\right) = 4$.

4) Pour tout $x \geq -1$ et $x \neq 0$, on a : $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right) = \frac{1}{2}$.

5) Pour tout $x \geq -3$ et $x \neq 1$, on a : $\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} = \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{1-x} = -2-\sqrt{x+3}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(-2-\sqrt{x+3}\right) = -4$.

EXERCICE VI :

1) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos(x) - 1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x) = 0$.

Directement on aboutit à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

2) La fonction cosinus est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est $-\sin(0) = 0$.

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x-0} = -\sin(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ car pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x-0}$.

EXERCICE VII :

31 page 46 du LIVRE :

a) $D_f = \left]0 ; +\infty\right[$. On pose $X = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$\forall x > 0$, on a : $x - \sqrt{x} + \frac{1}{x} = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)$ ce qui permet d'obtenir : $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{X \to +\infty} X^3 = +\infty$ donc, par théorème de composition, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $D_f = \mathbb{R}^*$. On pose $X = \frac{\pi}{x}$.

$f(x) = x \sin\frac{\pi}{x} = \pi \times \frac{x}{\pi}\sin\frac{\pi}{x} = \pi \times \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ donc, par théorème de composition,

on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = 1$ et par produit, on obtient : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pi}$.

40 page 47 du LIVRE :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin(3x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$: on obtient la F.I. « $\frac{0}{0}$ ».

2) $\forall x \neq 0$, on a : $f(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} \times 3$.

On pose $X = 3x$.

$\lim\limits_{x \to 0} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$, alors par théorème de composition, on en déduit : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$.

Par suite : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3}$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(3x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3\cos(3x)$.

$\forall x \neq 0$, on a : $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 3 \times \cos(0) = 3$.

EXERCICE VIII : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Pour tout réel $x \neq 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \sin X = 0$, donc, par théorème de composition, on en déduit que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on obtient une F.I. de la forme : "$0 \times (+\infty)$".

2) Pour tout réel $x \neq 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$.

$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{X}\sin(X) = \frac{\sin(X)}{X}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$, donc, par théorème de composition, on en déduit que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ soit $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.

EXERCICE IX :

12 page 177 du LIVRE : on utilise le théorème 2 page 166.

a) $u_n = f(n)$ avec $f : x \longmapsto x - \frac{1}{x+1}$ $(x \neq -1)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f : x \longmapsto \frac{x}{4} - 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

16 page 177 du LIVRE : on utilise les théorèmes 2 et 3 page 166.

a) $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \dfrac{n\pi + 1}{2n + 1}$ et $f : x \longmapsto \sin x$.

$v_n = g(n)$ où $g : x \longmapsto \dfrac{\pi x + 1}{2x + 1}$ $(x \neq -\frac{1}{2})$. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, par propriété de la limite de la composée d'une suite et d'une fonction, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = \boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.

b) $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \dfrac{2n\pi}{3n + 1}$ et $f : x \longmapsto \cos x$.

$v_n = g(n)$ où $g : x \longmapsto \dfrac{2\pi x}{3x + 1}$ $(x \neq -\frac{1}{3})$. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{2\pi}{3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{2\pi}{3}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \cos x = -\dfrac{1}{2}$, par propriété de la limite de la composée d'une suite et d'une fonction, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = \boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{2}}$.

23 page 178 du LIVRE :

$u_n = f(n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$ $(x \neq -1)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ (théorème 2 page 166).

$v_n = \dfrac{n^2 + 1}{n^2 + n}$ et $v_n = g(n)$ où $g : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x}$ $(x \neq 0$ et $x \neq -1)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1}$ (théorème 2 page 166).

$w_n = \dfrac{1 - n}{n + 1}$ et $w_n = h(n)$ où $h : x \longmapsto \dfrac{1 - x}{x + 1}$ $(x \neq -1)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -1$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -1}$ (théorème 2 page 166).

$t_n = \dfrac{1 - n}{-2n^2}$ et $t_n = k(n)$ où $k : x \longmapsto \dfrac{1 - x}{-2x^2}$ $(x \neq 0)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0}$ (théorème 2 page 166).

<u>21 page 178</u> du LIVRE :

a) $u_n = f(n)$ où $f : x \longmapsto x^2\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{2}\right)$ avec $x \in \left]-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right] \cup]0 ; +\infty[$.

La présente forme de $f(x)$ conduit à une indétermination : "$+\infty \times 0$".

On prouve que : $\forall x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x}} + \sqrt{2}}$ et on obtient, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Par suite : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ (théorème 2 page 166).

b) $u_n = f(n)$ où $f : x \longmapsto \sqrt{2x^2 - 5} - x\sqrt{2}$ avec $x \in \left]-\infty ; -\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{5}{2}} ; +\infty\right[$.

La présente forme de $f(x)$ conduit à une indétermination : "$(+\infty) - (+\infty)$".

On prouve que : $\forall x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{-5}{\sqrt{2x^2 - 5} + x\sqrt{2}}$ et on obtient, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Par suite : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$ (théorème 2 page 166).