ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.

FICHE 2 :

EXERCICE N° 1 :

1. $|j| = 1$. **2.** $j^2 = \overline{j}$. $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

EXERCICE N° 2 :

15 page 333 du LIVRE : correction page 474 du livre.

EXERCICE N° 3 :

6 page 333 du LIVRE :

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = \frac{2}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}i$; $z_3 = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$.

8 page 333 du LIVRE :

$z_1 = \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i$; $z_2 = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$.

12 page 333 du LIVRE :

a) $z = 1 - 2i$; **b)** $z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; **c)** $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = 3i$;

d) $\forall z \neq 1$, on a : $(z + 1) = 2i(z - 1)$. On trouve : $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ qui est différent de 1.

18 page 334 du LIVRE : correction page 474 du livre.

20 page 334 du LIVRE :

1. On trouve que $\overline{Z} = -i\overline{z} + z - 3 + 2i$ …

2. Le point d'affixe Z est sur l'axe des abscisses équivaut à Z est un réel.

Z est un réel $\Leftrightarrow$ Im(Z) = 0 $\Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow Z - \overline{Z} = 0 \Leftrightarrow 2i(x - y - 2) = 0$ d'après la question précédente …

21 page 334 du LIVRE :

a) $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **b)** $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -1 + 2i$

c) $\forall z \neq -1$, on a : $\frac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i \Leftrightarrow \frac{z - 1}{z + 1} = -i \Leftrightarrow \ldots z = -i$ qui est différent de (- 1).

<u>9 page 333 du LIVRE :</u>

1. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = 3$; $\mathrm{Re}(iz_1) = -2$; $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{3}{10}$.

2. $\mathrm{Im}(z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3) = -\frac{9}{2}$; $\mathrm{Im}(z_1z_2) = 7$.

3) $|z_1| = \sqrt{13}$; $|z_2| = \sqrt{10}$; $|z_1z_2| = \sqrt{130}$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{130}}{10}$.

EXERCICE N° 4 :

a) Vérification immédiate en utilisant les propriétés du conjugué d'un nombre complexe.

b) $z_1 + z_2 = 2 \times \mathrm{Re}(z_1)$ et $z_1 - z_2 = 2 \times i \times \mathrm{Im}(z_1)$.

<u>EXERCICE N° 5 : *Extrait de l'épreuve du concours EFREI (mai 2010)*</u>

Réponse c.

On pose $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) et on trouve que : $y = -3$ et x est solution de l'équation $x - 4 = \sqrt{x^2 + 9}$, équation qui n'a pas de solution.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.
EXERCICE N° 6 :
45 page 337 du LIVRE :
1. On trouve : $X = 2x^2 - 2y^2 - 2x + 4$ et $Y = 4xy - 2y$.

2. z est réel ou $z = \frac{1}{2} + iy$ où $y \in \mathbb{R}$.

47 page 337 du LIVRE :

1. $\forall z \neq 1$, on a : $Z + \overline{Z} = \dfrac{10|z|^2 - 7(z + \overline{z}) + 4}{|z|^2 - (z + \overline{z}) + 1}$.

2. $\forall z \neq 1$, on a :

Z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{Z + \overline{Z}}{2} = 0 \Leftrightarrow 10|z|^2 - 7(z + \overline{z}) + 4 = 0$

$\forall (x ; y) \neq (1 ; 0)$, on a :
Z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $10(x^2 + y^2) - 7 \times 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 0{,}7)^2 + (y - 0)^2 = 0{,}3^2$
$\forall (x ; y) \neq (1 ; 0)$, on a :
Z imaginaire pur $\Leftrightarrow m(x ; y)$ appartient au cercle $C(\Omega ; 0{,}3)$ où $\Omega(0{,}7 ; 0)$, le cercle étant privé du point A(1 ; 0).

Conclusion : le point *m*(*z*) appartient au cercle de centre Ω(0,7 ; 0) et de rayon 0,3 privé du point d'affixe 1.

__86 page 341 du LIVRE__ :
1. $\forall z \neq -1$, on a :
$X = \dfrac{x^2 + 3x + 2 + y^2}{(x + 1)^2 + y^2}$ et $Y = \dfrac{y}{(x + 1)^2 + y^2}$.
2. $\forall z \neq -1$, on a :
Z est un réel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(Z) = 0$
$\forall (x ; y) \neq (-1 ; 0)$, on a :
Z est un réel $\Leftrightarrow$ $y = 0$ $\Leftrightarrow$ z est un réel différent de (- 1).
Z est un réel $\Leftrightarrow$ $m(z)$ appartient à l'axe réel privé du point d'affixe (- 1).
Conclusion : l'ensemble des points *m*(*z*) est l'axe réel privé du point d'affixe (- 1).
3. $\forall z \neq -1$, on a :
Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(Z) = 0$
$\forall (x ; y) \neq (-1 ; 0)$, on a :

Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow m(x ; y)$ appartient au cercle $C\left(\Omega ; \frac{1}{2}\right)$ où $\Omega\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$, le cercle étant privé du point A(- 1 ; 0).

Conclusion : le point *m*(*z*) appartient au cercle de centre $\Omega\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point d'affixe (- 1).

87 page 341 du LIVRE :
1. $\forall z \neq -2i$, on a :
$X = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$ et $Y = \dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$.
2. a) $\forall z \neq -2i$, on a :
$M(z) \in E$ $\Leftrightarrow$ Z est un réel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(Z) = 0$
$\forall (x ; y) \neq (0 ; -2)$, on a :

$M(z) \in E \Leftrightarrow -x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow$ M(x ; y) appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$, privée du point A(0 ; - 2).

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.

Conclusion : l'ensemble E est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$ privée du point d'affixe ($-2i$).

2) b) $\forall z \neq -2i$, on a :
$M(z) \in F \Leftrightarrow Z$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0$
$\forall (x ; y) \neq (0 ; -2)$, on a :

$M(z) \in F \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$M(z) \in F \Leftrightarrow M(x ; y)$ appartient au cercle $C(\Omega ; \frac{\sqrt{5}}{2})$ où $\Omega(1 ; -\frac{3}{2})$, le cercle étant privé du point A(0 ; - 2).

Conclusion : l'ensemble F est le cercle de centre $\Omega(1 ; -\frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point d'affixe ($-2i$).

3) E est la droite passant par les points de coordonnées (2 ; - 1) et (4 ; 0) privée du point A(0 ; - 2).
F est le cercle de centre Ω(1 ; - 1,5) passant par le point de coordonnées (2 ; - 1), ce cercle étant privé du point A(0 ; - 2).

88 page 341 du LIVRE :

1. Pour tout point M distinct du point A, on a :

M confondu avec M' $\Leftrightarrow \forall z \neq i,\ z = \frac{z^2}{i - z} \Leftrightarrow \forall z \neq i,\ z(2z - i) = 0 \Leftrightarrow \forall z \neq i,\ z = 0$ ou $z = \frac{1}{2}i$.

Conclusion : il y a deux points invariants, le point O(0) et le point B($\frac{1}{2}i$).

2. a) $\forall z \neq i$, on a :

$$z' = \frac{(x+iy)^2}{i - x - iy} = \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{-x + i(1-y)} = \frac{(x^2 - y^2 + 2xyi)(-x - i(1-y))}{(-x)^2 + (1-y)^2} = \ldots = \frac{-x^3 + 2xy - xy^2 + i(-x^2 + y^2 - y^3 - x^2y)}{x^2 + (1-y)^2}$$

2. b) Pour tout point M distinct de A, on a :
$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow z'$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = x' = 0$.
$\forall (x ; y) \neq (0 ; 1)$, on a :
$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow -x(x^2 - 2y + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1$
$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow M(x ; y)$ appartient à l'axe des imaginaires purs privé du point A(0 ; 1) ou $M(x ; y)$ appartient au cercle C(A ; 1) où A(0 ; 1).
Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ cherché est la réunion de l'axe des imaginaires purs privé du point A d'affixe i et du cercle de centre A(i) et de rayon 1.

EXERCICE N° 7 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on place les points images des nombres complexes donnés : A(3) ; B(- 4) ; C($2i$) ; D($-1 + i$) et E($2 - 2i$).

Par lecture graphique, on trouve que OA = 3 et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = 0$. Donc le nombre complexe 3 a pour module 3 et pour argument 0 (modulo 2π).

On trouve de la même façon : $|-4| = 4$ et $\arg(-4) = \pi\ [2\pi]$; $|2i| = 2$ et $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$;

$|-1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$; $|2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

EXERCICE N° 8 :

23 page 334 du LIVRE :

a) $z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$; **b)** $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; **c)** $z_3 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

d) $z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; **e)** $z_5 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; **f)** $z_6 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.
27 page 334 du LIVRE :

a) L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine O, privée de O, et faisant un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec l'axe des réels.

b) L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine O, privée de O, et faisant un angle de $-\frac{2\pi}{3}$ avec l'axe des réels.

c) L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine O, privée de O, constituée des points d'affixes les réels strictement négatifs.

EXERCICE N° 9 :
1) L'écriture proposée n'est pas la forme trigonométrique de z car cette écriture n'est pas de la forme : $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$.

2) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. **3)** $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

EXERCICE N° 10 :
1) $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

$|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{12}$. On en déduit : $Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

2) $Z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ sous forme algébrique.

Par unicité de l'écriture de Z sous forme algébrique, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$

EXERCICE N° 11 :
28 page 334 du LIVRE :

$|-z| = r$ et $\arg(-z) = \alpha + \pi$; $|\overline{z}| = r$ et $\arg(\overline{z}) = -\alpha\ [2\pi]$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\alpha\ [2\pi]$;

$|z^3| = r^3$ et $\arg(z^3) = 3\alpha\ [2\pi]$; $p \in \mathbb{N}^*$, $|z^p| = r^p$ et $\arg(z^p) = p\alpha\ [2\pi]$; $\left|\frac{1}{z^p}\right| = \frac{1}{r^p}$ et $\arg\left(\frac{1}{z^p}\right) = -p\alpha\ [2\pi]$.

31 page 335 du LIVRE :
a) $z = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; **b)** $z = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$; **c)** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{36}\right)\right)$;

d) $z = 2^{1003}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

EXERCICE N° 12 :
1) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

2) $|Z| = |z|^{2010} = 1$ et $\arg(Z) = 2010 \times \arg(z) = -670\pi = -335 \times 2\pi\ [2\pi]$ D'où : $\arg(Z) = 0\ [2\pi]$.
On obtient $Z = 1(\cos(0) + i\sin(0))$ sous forme trigonométrique et $Z = 1$ sous forme algébrique.

EXERCICE N° 13 :
33 page 335 du LIVRE :
a) M(z) est un point de la demi-droite]OA) (privée de O) où A(- 1 ; 0) ;
b) M(z) est un point de la demi-droite]OB) (privée de O) où B(0 ; 1) ;
c) M(z) est un point de l'axe des réels privé de O.

66 pages 338/339 du LIVRE :

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.

❶ $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ et $r > 0$; ❷ $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}\ [\pi]$ et $r > 0$;

❸ $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r = 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$; ❹ $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r \leq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$;

❺ $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; ❻ $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow 1 \leq r \leq 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

107 page 344 du LIVRE :

1) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

* On pose $Z = \frac{z}{z'}$, et on prouve, grâce au pré-requis que : $\arg(Z) = \arg(z) - \arg(z')$;

* On a : $\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = \arg(1) - \arg(z^2)$ d'après la relation précédente et $\arg(z^2) = 2\arg(z)$ d'après le pré-requis.

2)

a) M'(Z) décrit la demi-droite d'origine O, privée de O, de vecteur directeur $\overrightarrow{w'}$ tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{w'}) = -\frac{2\pi}{3}$.

b) M(z) décrit la droite, privée de O, de vecteur directeur $\overrightarrow{w''}$ tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{w''}) = -\frac{\pi}{6}$.

FICHE 3 :

EXERCICE N° 1 :

40 page 335 du LIVRE :

a) $\Delta = -4$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\ ;\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$; **b)** $\Delta = -11$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2} ; \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}\right\}$;

c) $\Delta = -3$ et $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ou}\ \bar{j}\ ;\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ou}\ j\right\}$; **d)** $\Delta = -8$ et $\mathcal{S} = \left\{1 - i\sqrt{2} ; 1 + i\sqrt{2}\right\}$;

e) $\Delta = 5$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; **f)** $\Delta = -12$ et $\mathcal{S} = \left\{i\sqrt{3}\ ;\ -i\sqrt{3}\right\}$.

52 page 337 du LIVRE :

a) On pose $Z = z^2$ et l'équation équivaut à $Z = z^2$ et $Z^2 + 3Z + 2 = 0 \Leftrightarrow Z = z^2$ et ($Z = -2$ ou $Z = -1$).

$\mathcal{S} = \{-i\sqrt{2}\ ;\ i\sqrt{2}\ ;\ -i\ ;\ i\}$.

b) On pose $Z = z^2$ et l'équation équivaut à $Z = z^2$ et $Z^2 - 32Z - 144 = 0 \Leftrightarrow Z = z^2$ et ($Z = -4$ ou $Z = 36$).

$\mathcal{S} = \{-2i\ ;\ 2i\ ;\ 6\ ;\ -6\}$.

53 page 337 du LIVRE :

1) $(1 + i)^6 = \left((1 + i)^2\right)^3 = (2i)^3 = -8i$.

2) a) $(1 + i)^6 = \left((1 + i)^3\right)^2 = -8i$ d'après la question 1).

Donc $(1 + i)^3$ est une solution de (E) soit **$(-2 + 2i)$**.

2) b) $-(1 + i)^3$ ou **$2 - 2i$ est une autre solution de (E)**.

3) $(1 + i)^6 = \left((1 + i)^2\right)^3 = -8i$ d'après la question 1).

Donc $(1 + i)^2$ ou $2i$ est une solution de $z^3 = -8i$.

55 page 337 du LIVRE :

1) Les solutions de l'équation sont : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$. On a : $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$;

$|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

2) Soit (E) : $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$.

On pose $Z = -iz + 3i + 3$ pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$.

(E) $\Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 2 = 0$ et $Z = -iz + 3i + 3$.

Résolvons l'équation : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$. D'après la question 1), les solutions sont $Z_1 = 1 - i$ et $Z_2 = 1 + i$.

(E) $\Leftrightarrow$ ($Z = 1 - i$ ou $Z = 1 + i$) et $Z = -iz + 3i + 3 \Leftrightarrow -iz + 3i + 3 = 1 - i$ ou $-iz + 3i + 3 = 1 + i$

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.

(E) $\Leftrightarrow$ $z = -2i + 4$ ou $z = -2i + 2$.

$\mathcal{S}$ **= {4 – 2*i* ; 2 – 2*i*}**.

EXERCICE N° 2 : P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

1) $\overline{P(z)} = \overline{z^3} + \overline{z^2} - \overline{4z} + \overline{6}$ en utilisant la propriété sur la somme des conjugués.

$\overline{P(z)} = \left(\overline{z}\right)^3 + \left(\overline{z}\right)^2 - 4\overline{z} + 6$ en utilisant la propriété sur le produit des conjugués. D'où :

$\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

2) $P(1 + i) = (1 + 3i + 3 \times (-1) + i^3) + (2i) - (4 + 4i) + 6 = 0$, ce qui prouve que $(1 + i)$ est une racine de $P(z)$.

D'après la question 1), on a : $P(\overline{1 + i}) = \overline{P(1 + i)} = \overline{0} = 0$, ce qui prouve que $(\overline{1 + i}) = 1 - i$ est une autre racine complexe de $P(z)$.

EXERCICE N° 3 : *Extrait de l'épreuve du concours FESIC (mai 2010)*

a. VRAI.

On pose, pour tout complexe z, $P(z) = z^2 - 2\overline{z} + 1$.

On vérifie que $P(-1 + 2i) = 0$, ce qui prouve que $(-1 + 2i)$ est une racine de $P(z)$ ou une solution de l'équation (E).

Par ailleurs, grâce aux propriétés des conjugués, on montre que : $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

D'où : $P(\overline{-1 + 2i}) = \overline{P(-1 + 2i)} = \overline{0} = 0$, ce qui prouve que $\overline{-1 + 2i} = -1 - 2i$ est aussi solution de l'équation (E).

(E) : $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

On pose : $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

b. FAUX.

z solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ y(2x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - y^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

z solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4 - y^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

L'équation (E) a donc 3 solutions : $\mathcal{S}$ **= {1 ; - 1 + 2*i* ; - 1 – 2*i*}**.

c. VRAI.

z solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ y(2x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - y^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

z solution de (E) $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - y^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow (x - 1)^2 = y^2$.

d. VRAI.

$1 + (-1 + 2i) + (-1 - 2i) = -1$.

EXERCICE N° 4 :

(E_1) : $z^3 - 3z^2 + 7z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - 3z + 7 = 0$.

$z^2 - 3z + 7 = 0$: $\Delta = -19$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{3 - i\sqrt{19}}{2}$ et $\dfrac{3 + i\sqrt{19}}{2}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ 0 \ ; \ \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{19}}{2} \ ; \ \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{19}}{2} \right\}.$$

(E_2) : $2\overline{z^2} + 4\overline{z} + 3 = 0 \Leftrightarrow \overline{2z^2 + 4z + 3} = \overline{0} \Leftrightarrow 2z^2 + 4z + 3 = 0$.

$\Delta = -8$ et $\mathcal{S} = \left\{ -1 - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ -1 + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.

(E_3) : $-\frac{1}{z} + 2 = 2z$.

Dans $\mathbb{C}^*$, on a : $(E_3) \Leftrightarrow \frac{-1 + 2z - 2z^2}{z} = 0 \Leftrightarrow 2z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\ ;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\}}$**.**

EXERCICE N° 5 : *Extrait de l'épreuve du concours FESIC (mai 2010)*

a. VRAI. Pour tout z différent de 1, on a : $(1 - z) \times z' = (1 - z)(z^2 + z + 1) = -z^3 + 1$.

Par suite, pour tout z différent de 1, on a : $z' = \frac{1 - z^3}{1 - z}$.

b. VRAI. Les solutions de l'équation $z' = 0$ sont : $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ et $z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (soit j et $\overline{j}$).

Les points images respectifs de z_1 et z_2 sont $B\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

L'ensemble E_0 est donc constitué des points B et C, qui sont symétriques par rapport à l'axe des réels $(O\ ;\ \vec{u})$.

c. VRAI. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $M(z)$ appartienne à E_0 et n un entier naturel.
On a donc $z = z_B$ ou $z = z_C$ (donc z est non nul). $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$.

* Comme $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1$, alors : $|z^n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $\arg(z_B) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg(z_C) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. On en déduit : $\arg(z^n) = \frac{2n\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\arg(z^n) = -\frac{2n\pi}{3}\ [2\pi]$.

On a donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $z^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ ou $z^n = \cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Si $n = 0$, on trouve $z^n = 1$ et z^n est l'affixe de A ;

Si $n = 1$, on trouve $z^n = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = z_B$ ou $z^n = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = z_C$;

Si $n = 2$, on trouve $z^n = z_C$ ou $z^n = z_B$; Si $n = 3$, on retrouve $z^n = 1 = z_A$.

d. VRAI. Soit E_1 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $z' \in \mathbb{R}$.

$\forall\ z \in \mathbb{C}$, on a : $z' = z^2 + z + 1$.

On pose $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$M \in E_1 \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$

$M \in E_1 \Leftrightarrow z = x$ ou $z = -\frac{1}{2} + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ M est un point de l'axe des réels ou M est un point de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Conclusion : E_1 est la réunion de l'axe des réels et d'une droite parallèle à l'axe des imaginaires purs, donc E_1 est bien la réunion de deux droites perpendiculaires.

EXERCICE N° 6 :

63 page 338 du LIVRE :

1) $P(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha})^4 - 6(\overline{\alpha})^3 + 23(\overline{\alpha})^2 - 34\overline{\alpha} + 26 = \overline{\alpha^4 - 6\alpha^3 + 23\alpha^2 - 34\alpha + 26} = \overline{P(\alpha)}$ d'après les propriétés sur le conjugué d'un nombre complexe.

Si $P(\alpha) = 0$, alors $\overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$ soit, d'après ce qui précède : $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2) $P(1 + i) = (2i)^2 - 6(1 + i) \times 2i + 23 \times 2i - 34 - 34i + 26$ car $(1 + i)^2 = 2i$.
$P(1 + i) = -4 - 12i + 12 + 46i - 34 - 34i + 26 = 0$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.

On en déduit que $(1 + i)$ est solution de l'équation $P(z) = 0$ et d'après la question 1), on a : $P(\overline{1 + i}) = 0$.

Par suite : $P(1 - i) = 0$ et $(1 - i)$ est aussi une solution de $P(z) = 0$.

Conclusion : Les nombres $(1 + i)$ et $(1 - i)$ sont deux solutions complexes conjuguées de $P(z) = 0$.

3) a) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Q(z)} = z^2 + (1 + i)(1 - i) - z(1 - i) - z(1 + i) = \mathbf{z^2 - 2z + 2}$.

3) b) $P(1 + i) = P(1 - i) = 0$ donc $P(z)$ est divisible par $\big(z - (1 + i)\big)$ et $\big(z - (1 - i)\big)$.

Par suite, $P(z)$ est divisible par $\big(z - (1 + i)\big)\big(z - (1 - i)\big)$ soit par $Q(z)$.

Comme $P(z)$ est de degré 4 et $Q(z)$ est de degré 2, et que $P(z)$ est divisible par $Q(z)$, alors il existe un polynôme $Q_1(z)$ de degré 2 tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = Q(z) \times Q_1(z)$.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C}$, $Q_1(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = Q(z) \times Q_1(z) \iff \forall z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = (z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c)$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = az^4 + (b - 2a)z^3 + (c - 2b + 2a)z^2 + (- 2c + 2b)z + 2c$

Par identification des coefficients de même degré, on en déduit que :

$a = 1$; $b - 2a = - 6$; $c - 2b + 2a = 23$; $- 2c + 2b = - 34$ et $2c = 26$.

$a = 1$; $b = - 4$ et $c = 13$.

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{C}$, on a $Q_1(z) = z^2 - 4z + 13$.

3) c) $\forall z \in \mathbb{C}$,

$P(z) = 0 \iff (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 13) = 0 \iff z = 1 + i$ ou $z = 1 - i$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$.

$z^2 - 4z + 13 = 0$: $\Delta = - 36$. On trouve : $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = 2 + 3i$.

$P(z) = 0 \iff z = 1 + i$ ou $z = 1 - i$ ou $z = 2 - 3i$ ou $z = 2 + 3i$.

$\mathcal{S}$ **= {1 - i ; 1 + i ; 2 – 3i ; 2 + 3i}**.

59 page 338 du LIVRE :

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$.

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 19z^2 + 52z - 40 = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 19z^2 + 52z - 40 = z^4 + (4 + a)z^3 + (6a + b)z^2 + (2a^2 + 4b)z + 2ab$.

Par identification des coefficients de même degré, on en déduit que :

$4 + a = 0$; $6a + b = - 19$; $2a^2 + 4b = 52$ et $2ab = - 40$.

$a = - 4$ et $b = 5$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$,

$P(z) = 0 \iff (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8) = 0 \iff z^2 - 4z + 5 = 0$ ou $z^2 + 4z - 8 = 0$.

$z^2 - 4z + 5 = 0$: $\Delta = - 4$. On trouve : $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 2 + i$.

$z^2 + 4z - 8 = 0$: $\Delta = 48$. On trouve : $z_1 = - 2 + 2\sqrt{3}$ et $z_2 = - 2 - 2\sqrt{3}$.

$\mathcal{S}$ **= {2 - i ; 2 + i ; - 2 + 2$\sqrt{3}$; - 2 - 2$\sqrt{3}$}**.

62 page 338 du LIVRE.

1) $f(- 4) = - 64 + 5 \times 16 + 5 \times (- 4) + 4 = 0$.

$f(- 4) = 0$ donc $f(x)$ est divisible par $(x - (- 4))$ ou $(x + 4)$.

On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 4)(x^2 + x + 1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = 0 \iff (x + 4) = 0$ ou $(x^2 + x + 1) = 0 \iff x = - 4$ ou $x^2 + x + 1 = 0$.

Or, $x^2 + x + 1 = 0$: $\Delta = - 3 < 0$, donc l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : (- 4) est la seule solution réelle de l'équation $f(x) = 0$.

2) a) Soit $z = r \in \mathbb{R}$.

$P(r) = 0 \iff \begin{cases} 2r^4 + 10r^3 + 10r^2 + 8r = 0 \\ - r^3 - 5r^2 - 5r - 4 = 0 \end{cases}$ par identification à 0 des parties réelles et imaginaires.

$P(r) = 0 \iff \begin{cases} r(r^3 + 5r^2 + 5r + 4) = 0 \\ r^3 + 5r^2 + 5r + 4 = 0 \end{cases} \iff r^3 + 5r^2 + 5r + 4 = 0$ car les deux équations doivent être vérifiées simultanément.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 5.

$P(r) = 0 \Leftrightarrow f(r) = 0$. Or, r est un réel et (-4) est la seule solution réelle de $f(x) = 0$ d'après la question 1).
$P(r) = 0 \Leftrightarrow r = -4$. Conclusion : r vaut (-4).

2) b) Soit $r \in \mathbb{R}$.
$P(ir) = 0 \Leftrightarrow 2r^4 + (10 - i) \times (-ir^3) + (10 - 5i) \times (-r^2) + (8 - 5i) \times (ir) - 4i = 0$

$P(ir) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2r^4 - r^3 - 10r^2 + 5r = 0 \\ -10r^3 + 5r^2 + 8r - 4 = 0 \end{cases}$ par identification à 0 des parties réelles et imaginaires.

$P(ir) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r(2r - 1)(r^2 - 5) = 0 \\ (2r - 1)(-5r^2 + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2r - 1 = 0$ car les deux équations doivent être vérifiées simultanément.

$P(ir) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$. Conclusion : $\frac{1}{2}i$ est une solution imaginaire pure de $P(z) = 0$.

2) c) $\forall z \in \mathbb{C}$,
$P(z) = (2z - i)(z + 4)(z^2 + az + b) \Leftrightarrow$
$2z^4 + (10 - i)z^3 + (10 - 5i)z^2 + (8 - 5i)z - 4i = 2z^4 + (2a + 8 - i)z^3 + (2b + 8a - ai - 4i)z^2 + (8b - bi - 4ai)z - 4bi$
Par identification des coefficients de même degré, on en déduit que :
$10 - i = 2a + 8 - i$; $10 - 5i = 2b + 8a - ai - 4i$; $8 - 5i = 8b - bi - 4ai$ et $-4i = -4bi$
On trouve : $a = 1$ et $b = 1$.

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (2z - i)(z + 4)(z^2 + z + 1)$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0 \Leftrightarrow (2z - i)(z + 4)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2z - i = 0$ ou $z + 4 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$.

$z^2 + z + 1 = 0$: $\Delta = -3$. On trouve : $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}i$ ou $z = -4$ ou $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}i \,;\, -4 \,;\, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ **(soit** $\boldsymbol{j}$**)** $\boldsymbol{;\, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ **(soit** $\boldsymbol{\overline{j}}$ **)** $\boldsymbol{\}}$.

EXERCICE N° 7 :

1) $\Delta = -4\sin^2(\theta)$.
Si $\theta = 0$, alors $\Delta = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{S} = \{1\}}$. Si $\theta = \pi$, alors $\Delta = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{S} = \{-1\}}$.
Si $\theta \in \,]0 ; \pi[\cup]\pi ; 2\pi[$, alors $\Delta < 0$ et l'équation admet alors deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \cos(\theta) + i \times |\sin(\theta)|$ et $z_2 = \cos(\theta) - i \times |\sin(\theta)|$.

Remarque :
Si $\theta \in \,]0 ; \pi[$, alors $z_1 = \cos(\theta) + i \times \sin(\theta)$ et $z_2 = \cos(\theta) - i \times \sin(\theta)$.
Si $\theta \in \,]\pi ; 2\pi[$, alors $z_1 = \cos(\theta) - i \times \sin(\theta)$ et $z_2 = \cos(\theta) + i \times \sin(\theta)$.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.
a) On trouve que : $P(i) = P(-i) = 0$ donc $P(z)$ est divisible par $(z - i)$ et $(z - (-i))$.
Par suite, $P(z)$ est divisible par $(z - i)(z + i)$ ou $(z^2 + 1)$.
Comme $P(z)$ est de degré 4 et $(z^2 + 1)$ est de degré 2, et que $P(z)$ est divisible par $(z^2 + 1)$, alors il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 1)Q(z) \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3 = az^4 + bz^3 + (c + a)z^2 + bz + c$
Par identification des coefficients de même degré, on en déduit que :
$a = 1$; $b = -4$; $c + a = 4$; $b = -4$ et $c = 3$.

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{C}$, on a $Q(z) = z^2 - 4z + 3$.

b) $\forall z \in \mathbb{C}$,
$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z^2 - 4z + 3) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1$ ou $z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$ ou $z = 1$ ou $z = 3$.
$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{-i \,;\, i \,;\, 1 \,;\, 3\}}$.