TS2 **DEVOIR N° 4 (DM 2)**

DONNÉ le mardi 11 octobre 2011.
À RENDRE AU PLUS TARD le samedi 22 octobre 2011.

On pourra utiliser les propriétés suivantes :
La fonction *ln* désigne la fonction logarithme népérien (définie sur]0 ; + ∞[) que l'on étudiera plus tard dans l'année …
Propriété (1) $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x ;
Propriété (2) $e^{\ln(x)} = x$ pour tout réel strictement positif x .
Exemple : $4 = e^{\ln(4)}$

EXERCICE :

Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = x^2\, e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$.

Conjectures
Faire afficher sur l'écran de la calculatrice la représentation graphique de cette fonction sur [- 5 ; 5], puis émettre des conjectures concernant :
1. Le sens de variation de f sur [- 3 ; 2] ;
2. La position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.
Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A – Contrôle de la première conjecture
1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel
a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
c. En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.
d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans ℝ.
On note α cette solution. Montrer que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.
e. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Sens de variation de la fonction f sur ℝ.
a. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f.
c. Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B – Contrôle de la deuxième conjecture
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.
1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x + 2)}$.
a. Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0 ; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur [0 ; 1].
b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. a. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe $(x'x)$.
b. Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
c. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

TOURNEZ S.V.P.

Partie C – Tracé de la courbe

Compte-tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de *C* correspondant à l'intervalle [- 0,2 ; 0,4], dans le repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), avec les unités suivantes :
Sur l'axe (*x'x*), 1 cm représentera 0,05.
Sur l'axe (*y'y*), 1 cm représentera 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \cdot 10^{-4}$ (*n* entier relatif).

x	- 0,20	- 0,15	- 0,10	- 0,05	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
f(x)													

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.