ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

FICHE 1 :

EXERCICE 1 :

1 page 101 du LIVRE : a) e^x ; **b)** e^{-3} ; **c)** $1 + e^{-2x}$; **d)** e^{2-x} ; **e)** e^{4x} ; **f)** e^{2y}.

2 page 101 du LIVRE :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = (g(x) - h(x))(g(x) + h(x)) = e^{-x} \times e^x = e^0 = 1$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $2[g(x)]^2 - 1 = \dfrac{2e^{2x} + 2e^{-2x} + 4}{4} - 1 = \dfrac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{4} = g(2x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2g(x) \times h(x) = 2 \times \dfrac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{4} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = h(2x)$.

EXERCICE 2 :

12 page 101 du LIVRE :

Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, donc par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

13 page 101 du LIVRE :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2e^x + 1 \neq 0$ car $e^x > 0$ pour tout réel x. Donc : $D_f = \mathbb{R}$.

Les fonctions $x \longmapsto e^x - 1$ et $x \longmapsto 2e^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $(2e^x + 1) \neq 0$ pour tout réel x, donc par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{3e^x}{(2e^x + 1)^2}$.

14 page 101 du LIVRE :

Les fonctions $x \longmapsto \sin x + \cos x$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2\cos x \times e^x$.

16 page 101 du LIVRE :

Les fonctions $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto 2(x-1)$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par produit et par différence, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x(1 - e^x)$.

EXERCICE 3 :

a) $\mathbb{S} = \{0\}$; **b)** $\mathbb{S} = \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$; **c)** $\mathbb{S} = \varnothing$ car $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ pour tout réel x.

d) $\mathbb{S} = \{0\}$; **e)** $\mathbb{S} = \{0 ; 1\}$.

EXERCICE 4 :

a) $\mathbb{S} = \left[\dfrac{1}{5} ; +\infty\right[$; **b)** $\mathbb{S} = [0 ; 2]$; **c)** $\mathbb{S} = \mathbb{R}$; **d)** $\mathbb{S} =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$;

e) $\mathbb{S} = \varnothing$ car $e^{2x} > 0$ et $2e^{-x} > 0$ pour tout réel x ; **f)** $\mathbb{S} =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$ ($e^x > 0$ pour tout réel x, donc l'inéquation équivaut à $x(x-1) \geq 0$).

EXERCICE 5 :

5 page 101 du LIVRE : **a)** $\mathbb{S} = \varnothing$; **b)** $\mathbb{S} = \{2\}$.

6 page 101 du LIVRE : **a)** $\mathbb{S} = \{-2 ; 1\}$; **b)** $\mathbb{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi ; \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

7 page 101 du LIVRE : **a)** $\mathbb{S} = \{-3 ; 2\}$; **b)** $\mathbb{S} = \varnothing$.

8 page 101 du LIVRE : **a)** $\mathbb{S} = \varnothing$; **b)** $\mathbb{S} =]-\infty ; 3]$.

<u>9 page 101 du LIVRE :</u> **a)** $\mathbb{S} =]-\infty ; 0]$; **b)** $\mathbb{S} = \mathbb{R}^*$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.
EXERCICE 6 :
$\forall\ t \geq 1$, on a : $t^2 \geq t \geq 1$ et par suite : $-t^2 \leq -t$.

Comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit : $\forall\ t \geq 1$,
$-t^2 \leq -t \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t} \Leftrightarrow 0 \leq e^{-t} - e^{-t^2}$.

EXERCICE N° 7 : ***Extrait de France métropolitaine (septembre 2009)***
Partie A

1. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = e^x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^x$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
$y = e^a(x - a) + e^a$
Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'ordonnée 0. On doit donc résoudre :
$0 = e^a(x - a) + e^a \Leftrightarrow 0 = e^a(x - a + 1) \Leftrightarrow x - a + 1 = 0$ car $e^a \neq 0$ pour tout réel a.
$0 = e^a(x - a) + e^a \Leftrightarrow x = a - 1$.
Conclusion : On a donc P(a −1 ; 0).
2. On a M(a ; e^a) car M $\in C_f$. Vu que N est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, alors N(a ; 0).

D'où : $\overrightarrow{NP}(x_P - x_N\ ;\ y_P - y_N)$ ou $\overrightarrow{NP}(-1\ ;\ 0)$.
$\overrightarrow{NP}(-1\ ;\ 0)$ signifie que : $\boldsymbol{\overrightarrow{NP} = -\vec{i}}$.
PARTIE B
1. On a M(a ; $g(a)$) car M $\in C_g$. Vu que N est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, alors N(a ; 0).
L'équation de la tangente T_a à la courbe C_g au point M(a ; $g(a)$) est : $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.
Le point P de T_a d'ordonnée nulle est tel que : $0 = g'(a)(x_P - a) + g(a)$
$-g(a) = g'(a)(x_P - a)$
Par énoncé, $g'(x) \neq 0$ pour tout réel x, donc on a : $x_P - a = -\dfrac{g(a)}{g'(a)} \Leftrightarrow x_P = a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}$.

Conclusion : $\boldsymbol{P\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)}$.

2. On a : $P\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$ et N(a ; 0), donc $\overrightarrow{NP}\left(-\dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$.

Par suite : $\overrightarrow{NP} = \vec{i} \Leftrightarrow -\dfrac{g(a)}{g'(a)} = 1 \Leftrightarrow g(a) = -g'(a)$ pour tout réel a.
La fonction g est une solution de l'équation différentielle : $y' = -y$.

Nous verrons que les solutions de cette équation sont de la forme $y = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
On a donc : $g(x) = Ce^{-x}$ pour tout réel x.
Or, on a : $g(0) = 2$ par l'énoncé. D'où : $2 = C \times e^{-0} \Leftrightarrow 2 = C$.
On a donc : $g(x) = 2e^{-x}$ pour tout réel x.
Conclusion : il existe bien une seule fonction vérifiant les deux conditions données, c'est la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-x}$.

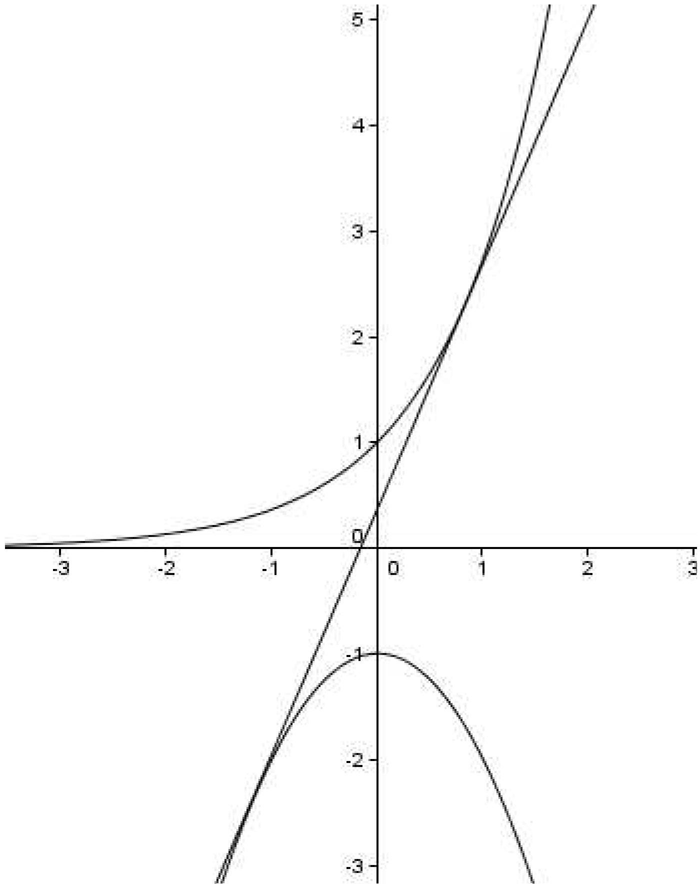
ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

FICHE 2 :

EXERCICE N° 3 : *Extrait de Centres étrangers (juin 2010)*

1. ***Tracé de la tangente commune aux deux courbes et abscisses des points de contact :***

Sur le graphique, on lit :
L'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(C_1) \approx 1$
L'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(C_2) \approx -1$.



2. a.
Le point A de (C_1) a pour abscisse a et son ordonnée est e^a.

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la courbe (C_1) admet en chaque point une tangente non parallèle à l'axe des des ordonnées. Son coefficient directeur est $\exp'(a) = \mathrm{e}^a$.

Une équation de ($\mathcal{T}_A$) est : $y = \mathrm{e}^a(x - a) + \mathrm{e}^a$

$$\boxed{\boldsymbol{y = \mathrm{e}^a x - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a}}$$

2. b.
Le point B de (C_2) a pour abscisse b et son ordonnée est $-b^2 - 1$.

La fonction u : $x \longmapsto -x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), donc la courbe (C_2) admet en chaque point une tangente non parallèle à l'axe des des ordonnées. Son coefficient directeur est $u'(b) = -2b$.

Une équation de ($\mathcal{T}_B$) est : $y = -2b(x - b) + (-b^2 - 1)$

$$y = -2bx + 2b^2 - b^2 - 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = -2bx + b^2 - 1}}$$

2. c. Les deux tangentes sont confondues si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur et un point commun. Le point d'intersection de chaque tangente avec l'axe des ordonnées est le point d'abscisse 0 et d'ordonnée, l'ordonnée à l'origine de chaque tangente.
Or, la tangente ($\mathcal{T}_A$) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ -a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a)$ et la tangente ($\mathcal{T}_B$) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ b^2 - 1)$.
En conséquence :
Les deux tangentes ($\mathcal{T}_A$) et ($\mathcal{T}_B$) sont confondues si, et seulement si, on a le système :

$$\textbf{(S)} : \begin{cases} \mathrm{e}^a = -2b \\ \mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^a = b^2 - 1 \end{cases} \textbf{ pour tous réels } a \textbf{ et } b.$$

2. d. Pour tous réels a et b, on a :

$$(S) : \begin{cases} \mathrm{e}^a = -2b \\ \mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{\mathrm{e}^a}{2} \\ \mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^a = \left(-\dfrac{\mathrm{e}^a}{2}\right)^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{\mathrm{e}^a}{2} \\ 4\mathrm{e}^a - 4a\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{2a} - 4 \end{cases}$$

$$(S) : \begin{cases} \mathrm{e}^a = -2b \\ \mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \textbf{(S')} : \begin{cases} \mathrm{e}^a = -2b \\ \mathrm{e}^{2a} + 4a\mathrm{e}^a - 4\mathrm{e}^a - 4 = 0 \end{cases}$$

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

3. a.

* $\forall x \in]-\infty ; 0[$, on a : $x < 0$ d'où $2x < 0$ et $0 < e^{2x} < 1 < 4$ (car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Donc : **$e^{2x} - 4 < 0$ pour tout réel x de $]-\infty ; 0[$.**

* $\forall x \in]-\infty ; 0[$, on a : $x < 0 < 1$ donc : $x - 1 < 0$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, alors : **$4e^x(x-1) < 0$ pour tout réel x de $]-\infty ; 0[$.**

3. b. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 4e^x(x-1) + e^{2x} - 4$.

Or, d'après la question 3) a) : $\forall x \in]-\infty ; 0[$, on a $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

Pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $f(x)$ est donc la somme de deux expressions strictement négatives, donc le réel $f(x)$ est strictement négatif sur $]-\infty ; 0[$.

Puisque $f(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[$, alors **l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty ; 0[$**.

3. c.

La fonction $u_1 : x \longmapsto e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$(la fonction affine $x \longmapsto 2x$ suivie de la fonction exponentielle) ;

La fonction $u_2 : x \longmapsto (4x-4)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

(la fonction affine $x \longmapsto 4x - 4$ par la fonction exponentielle) ;

La fonction constante $u_3 : x \longmapsto -4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est la somme des trois fonctions u_1 ; u_2 et u_3, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite sur $[0 ; +\infty[$.

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x - 0 = 2e^{2x} + 4xe^x = e^x(2e^x + 4x)$.

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, on a : $e^x > 0$ et $(2e^x + 4x) > 0$, donc $f'(x) > 0$.

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) > 0$, **ce qui prouve que la fonction f est strictement croissante sur**

$[0 ; +\infty[$.

3. d. (E) : $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ (E) : $f(x) = 0$.

On a : $f(0) = e^0 + 4 \times 0 \times e^0 - 4 \times e^0 - 4 = 1 + 0 - 4 - 4 = -7$.

$f(1) = e^2 + 4e - 4e - 4 = e^2 - 4$ et $e^2 - 4 > 0$.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$; strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $f(0) \times f(1) < 0$.

Alors, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Par ailleurs, f étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors :

$\forall x > 1$, on a : $f(x) > f(1) > 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]1 ; +\infty[$.

Conclusion : L'équation (E) admet une unique solution a sur $[0 ; +\infty[$.

Par balayage et à l'aide du tableur de la calculatrice, on obtient :

$f(0{,}8) \approx -0{,}827$ et $f(0{,}9) \approx 1{,}066$. Comme $f(0{,}8) < 0 < f(0{,}9)$ et comme la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit que : $0{,}8 < a < 0{,}9$.

$f(0{,}84) \approx -0{,}117$ et $f(0{,}85) \approx 0{,}07$. Comme $f(0{,}84) < 0 < f(0{,}85)$ et comme la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit que : $0{,}84 < a < 0{,}85$.

Conclusion : Un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution a est : $\boxed{0{,}84 < a < 0{,}85}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

4. On a vu que $b = -\dfrac{e^a}{2}$. Comme la fonction $x \longmapsto -\dfrac{e^x}{2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{e^x}{2}$ et $-\dfrac{e^x}{2} < 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$), alors : $-\dfrac{e^{0,85}}{2} < b < -\dfrac{e^{0,84}}{2}$ soit $\mathbf{-1,2 < b < -1,1}$.

$\left(-1,17 < -\dfrac{e^{0,85}}{2} \text{ et } -\dfrac{e^{0,84}}{2} < -1,15\right)$.

EXERCICE 2 :

15 page 101 du LIVRE :

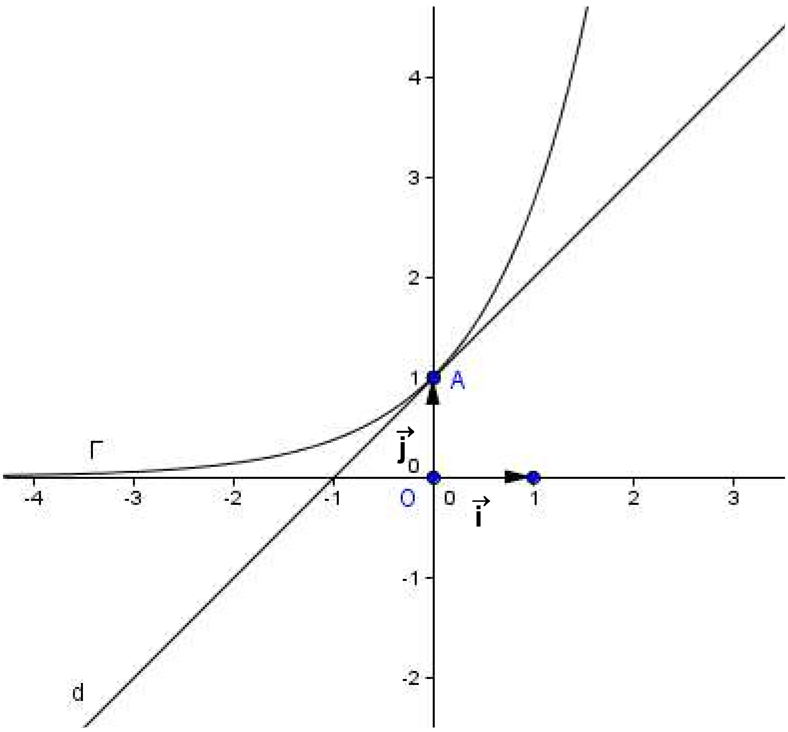
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x + 1 > x$ (car la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0). Donc, $e^x - x \neq 0$ pour tout réel x et ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

Les fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto e^x - x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $(e^x - x \neq 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x(-x+1)}{(e^x - x)^2}$.

67 page 106 du LIVRE :

Sur $]0 ; +\infty[$, f est définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1) a) d : $y = \exp'(0) \times x + \exp(0)$ soit
d : $y = 1x + 1$.
d est la tangente à Γ au point $A(0 ; 1)$.



1) b)
* Graphiquement, on voit que la courbe Γ est toujours située au-dessus de la tangente d, ce qui signifie :
$\forall\, u \in \mathbb{R}$, on a $e^u \geq u + 1$.
* Pour une justification par le calcul, voir le cours.

2) a)
D'après la question précédente :
$\forall\, u \in \mathbb{R}$, on a $e^u \geq u + 1$.
En posant $u = -x$, on obtient :
$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R}}$, $e^{-x} \geq -x + 1$ ou $\mathbf{e^{-x} + x - 1 \geq 0}$.

2) b) On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$ et $e^{-x} + x - 1 \geq 0$. Par produit, on obtient : $\mathbf{1 + (x - 1)e^x \geq 0}$ **pour tout réel x**.

3) Les fonctions $x \longmapsto e^x - 1$ et $x \longmapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}^*$), et $(x \neq 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et par suite sur $]0 ; +\infty[$.

$\forall\, x \in]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

D'après la question 2) b), on a : $1 + (x - 1)e^x \geq 0$ pour tout réel x.

Comme de plus $x^2 > 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, alors : $\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2} \geq 0$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

On a : $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$, ce qui prouve **que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

66 page 106 du LIVRE :

f_0 et f_1 sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ et $f_1(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f_0(x) = \dfrac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \dfrac{1}{e^{-x} + 1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = 1$ (th. de composition) donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^x) = +\infty$ donc :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$. Par lecture du graphique, on obtient :

La courbe rouge représente la fonction f_0 et la courbe verte représente la fonction f_1.

2) * $D_{f0} = \mathbb{R}$ et $D_{f1} = \mathbb{R}$, donc D_{f0} et D_{f1} sont centrés en 0.

* $\forall\, h \in \mathbb{R}$, on a : $f_0(0 + h) + f_0(0 - h) = \dfrac{e^h}{1 + e^h} + \dfrac{e^{-h}}{1 + e^{-h}} = \dfrac{e^h}{1 + e^h} + \dfrac{1}{e^h + 1} = 1 = 2 \times y_A$.

On en déduit que **A$(0\,;\dfrac{1}{2})$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_0$.**

* $\forall\, h \in \mathbb{R}$, on a : $f_1(0 + h) + f_1(0 - h) = \dfrac{1}{1 + e^h} + \dfrac{1}{1 + e^{-h}} = \dfrac{1}{1 + e^h} + \dfrac{e^h}{e^h + 1} = 1 = 2 \times y_A$.

On en déduit que **A$(0\,;\dfrac{1}{2})$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_1$.**

3) La courbe $\mathcal{C}_1$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_0$ par la symétrie orthogonale d'axe (Oy).

Justification (non demandée) :

* Soit M$(x\,; f_0(x)) \in \mathcal{C}_0$, alors M' = $s_{(Oy)}$(M) a pour coordonnées $(-x\,; f_0(x))$.

On a : $f_1(x_{M'}) = f_1(-x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^x + 1} = f_0(x) = y_{M'}$, ce qui prouve que le point M' appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$. On a prouvé que : $s_{(Oy)}(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_1$.

* Réciproquement, soit M$(x\,; f_1(x))$ un point de $\mathcal{C}_1$. On a alors : M = $s_{(Oy)}$(M') où M'$(-x\,; f_1(x))$.

Il reste à prouve que M' est un point de $\mathcal{C}_0$.

$f_0(x_{M'}) = f_0(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x + 1} = f_1(x) = y_{M'}$, ce qui prouve que le point M' appartient à la courbe $\mathcal{C}_0$. On a prouvé que : $\mathcal{C}_1 \subset s_{(Oy)}(\mathcal{C}_0)$.

Sous ces deux implications, on en déduit que : $\boldsymbol{\mathcal{C}_1 = s_{(Oy)}(\mathcal{C}_0)}$.

4) a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f_0(x) + f_1(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x} + \dfrac{1}{1 + e^x} = 1$.

4) b) La courbe $\mathcal{C}_1$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_0$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite Δ : $y = \dfrac{1}{2}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.
Justification (non demandée) :

* Soit $M(x\,;f_0(x)) \in \mathcal{C}_0$, alors $M' = s_\Delta(M)$ a pour coordonnées $(x\,;\,1 - f_0(x))$.

D'après la question 4) a) : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f_1(x) = 1 - f_0(x)$.

Donc : $M'(x\,;f_1(x))$. On a donc $y_{M'} = f_1(x) = f_1(x_{M'})$, ce qui prouve que le point M' appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$. On a prouvé que : $s_\Delta(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_1$.

* Réciproquement, soit $M(x\,;f_1(x))$ un point de $\mathcal{C}_1$. On a alors : $M = s_\Delta(M')$ où $M'(x\,;\,1 - f_1(x))$.

Il reste à prouve que M' est un point de $\mathcal{C}_0$.

$f_0(x_{M'}) = f_0(x) = 1 - f_1(x)$ d'après la question 4) a).

On a donc : $f_0(x_{M'}) = y_{M'}$, ce qui prouve que le point M' appartient à la courbe $\mathcal{C}_0$.

On a prouvé que : $\mathcal{C}_1 \subset s_\Delta(\mathcal{C}_0)$.

Sous ces deux implications, on en déduit que : $\boldsymbol{\mathcal{C}_1 = s_\Delta(\mathcal{C}_0)}$**.**

EXERCICE N° 3 :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = +\infty$ (*Indication :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 1$) ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - e^x) = +\infty$ (*Indication : factoriser par* e^x) ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1,1x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1,1x-1} = \mathbf{0^+}$ (*Indication : théorème de composition !*) ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = \mathbf{0^+}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x - x^2} = \mathbf{0^+}$ (*Indication : théorème de composition !*) ;

$\lim\limits_{x \to 0} e^{x - x^2} = \mathbf{1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{e^{-x}} = \mathbf{1}$ (*Indication : théorème de composition !*).

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

FICHE 3 :

EXERCICE N° 1 :

23 page 102 du LIVRE :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $2e^x + 1 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{2 + e^{-x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ (th. de composition) et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + e^{-x}) = 2$ (th. de composition), alors par quotient, on obtient : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) - 1 = 0 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x + 1) = 2 \times \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) + 1 = 0 + 1 = 1$.

Par quotient, on obtient : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1}$.

21 page 102 du LIVRE :

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}}$ (*Indication :* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$) ; $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ (*Indication :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$) ;

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+}$ (*Indication :* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$).

22 page 102 du LIVRE :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = 2xe^{-x}$. $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+}$ (*Indication :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ …).

EXERCICE N° 2 :

65 page 106 du LIVRE :

1) $f(0) = -1$ et $g(0) = 1$, donc la **courbe verte représente la fonction *f* et la courbe rouge représente la fonction *g*.**

2) a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $h(x) = f(x) - g(x)$. Comme f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R}}$, on a : $\boldsymbol{h'(x)} = f'(x) - g'(x) = 1 - e^x - (-e^x + (1 - x) \times e^x) = 1 - e^x(1 - x) = \boldsymbol{1 - g(x)}$.

2) b) D'après le graphique, on a : $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $g(x) < 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

On en déduit : $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variations de la fonction *h :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = 0$

Or, les abscisses des points d'intersection des deux courbes sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et on a $0 \in h(]-\infty\,;+\infty[) =]-\infty\,;+\infty[$, alors, d'après le théorème de la bijection, on en déduit qu'il existe un unique réel α appartenant à

$]-\infty\,;+\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Or, $h(1) = 1 - \mathrm{e}$ et $h(2) = 2$. Comme $h(1) < 0$ et $h(2) > 0$, alors : $h(1) < 0 < h(2)$. Comme la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $1 < \alpha < 2$

Conclusion : Il existe un unique réel α, tel que $1 < \alpha < 2$ et vérifiant $h(\alpha) = 0$ ou $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Par suite, il existe un unique point d'intersection entre les deux courbes dont l'abscisse α est un réel tel que $1 < \alpha < 2$.

3) b) Avec le tableur de la calculatrice, on obtient : $h(1{,}6) \approx -0{,}381$ et $h(1{,}7) \approx 0{,}06$, donc :

$\boxed{1{,}6 < \alpha < 1{,}7}$ **est un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.**

71 page 107 du LIVRE :

1) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto x + 1$).

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, alors : $\forall x < 0$, on a $g(x) > g(0)$.

Comme g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors : $\forall x > 0$, on a $g(x) > g(0)$.

Comme $g(0) = 0$, on en déduit que : **$g(x) \geq 0$ pour tout réel x.**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

1) b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$. Par suite : $\mathbf{e^x - x \neq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}}$.

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ (*Indication : mettre x en facteur et utiliser* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$).

On en déduit deux asymptotes horizontales : **une asymptote d'équation $y = -1$ au voisinage de $(-\infty)$ et une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $(+\infty)$.**

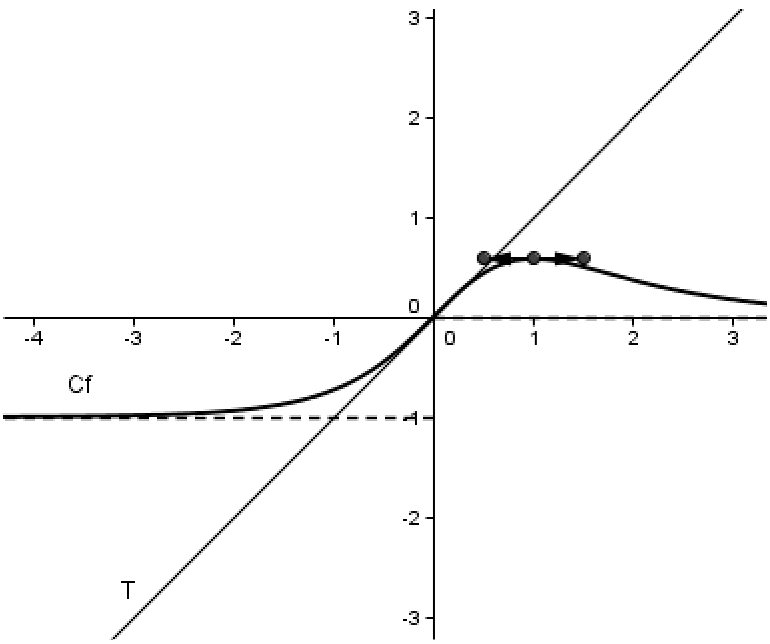
2) b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec ($e^x - x \neq 0$) pour tout réel x.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$. Comme $e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$ pour tout réel x, alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(1 - x)$.

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\ ; 1]$ et est strictement décroissante sur $[1\ ; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	-1 ↗	$\dfrac{1}{e-1}$	↘ 0

2) c) T : $y = x$. Pour étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T, on étudie le signe de la différence : $f(x) - x$.



$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - x = \dfrac{-xg(x)}{e^x - x}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) \geq 0$ et $e^x - x \geq 1 > 0$, donc le signe de $f(x) - x$ dépend du signe de $(-x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f(x) - x$	+	0	-
Position de $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T	$\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite T		$\mathcal{C}$ est en dessous de la droite T

En $x = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente ont un point commun : le point de coordonnées $(0\ ; 0)$.

2) d) Voir tracé ci-dessus.

EXERCICE N° 3 :

37 page 103 du LIVRE :

La fonction f est dérivable sur $I =]0\ ; +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur I.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

$\forall x \in$ I, on a : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{x-1}{x}$.

38 page 103 du LIVRE :

La fonction f est dérivable sur I = $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur I.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2xe^{x-1}$.

39 page 103 du LIVRE :

La fonction f est dérivable sur I = $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur I.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$.

41 page 103 du LIVRE :

1) a) La fonction u est dérivable sur]0 ; + ∞[donc, par théorème de composition, on en déduit que la fonction : $x \longmapsto e^{u(x)} = e^{\sqrt{x}}$ est dérivable sur]0 ; + ∞[. Comme la fonction $x \longmapsto x$ est dérivable sur]0 ; + ∞[, alors, par produit, la fonction f est dérivable sur]0 ; + ∞[.

1) b) $\forall x > 0$, on a : $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) \times e^{\sqrt{x}}$.

2) Le théorème de composition sur la dérivée de $\sqrt{u}$ ne donne que des conditions suffisantes. Pour étudier la dérivabilité de f en 0, il faut revenir à la définition.

On trouve : $\forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = e^{\sqrt{x}}$, d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ (limite par composition).

Ce qui prouve que f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 1$.

EXERCICE N° 4 : *Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)*

Correction donnée à ceux qui le désirent …

EXERCICE N° 5 : correction donnée à ceux qui le désirent …

EXERCICE N° 6 : correction donnée à ceux qui le désirent …

EXERCICE N° 7 : *Extrait de l'épreuve du concours EFREI (mai 2010)*

Correction donnée à ceux qui le désirent …

EXERCICE N° 8 : correction donnée à ceux qui le désirent …

EXERCICE N° 9 : 18 page 101 du LIVRE.

1) On lit que $f(0) = 2$ et $f(-2) = 0$; On trouve alors : $\boldsymbol{a = 1}$ **et** $\boldsymbol{b = 2}$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = e^{-x}(-x - 1)$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(-x-1)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0

$f'(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = -1$, donc f admet un extremum local en $x = -1$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$, puis est strictement décroissante sur $[-1\,;+\infty[$, alors

$f(-1)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Donc **A a pour coordonnées (- 1 ; e).**

60 page 104 du LIVRE :

1) a) $\forall x \in [0\,;+\infty[$, on a : $f(x) - (2x-2) = (1-x)e^{-x}$.

On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-2)] = 0^-$ (*Indication :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 1$).

Conclusion : La droite Δ : $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $(+\infty)$.

1) b) On étudie le signe de $f(x) - (2x-2)$ sur $[0\,;+\infty[$.

On trouve : sur $[0\,;1[$, la courbe $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Δ ; sur $]1\,;+\infty[$, la courbe $\mathcal{C}$ est strictement en dessous de Δ et en $x = 1$, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ ont un point commun, le point de coordonnées (1 ; 0).

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

2) b) $\forall x \in [0\,;+\infty[$, on montre que : $1 - e^{-x} \geq 0$. On a alors $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x dans $[0\,;+\infty[$ car $f'(x)$ est la somme de deux réels positifs sur cet intervalle.

2) c) On trouve que $f'(0) = 0$ On obtient :

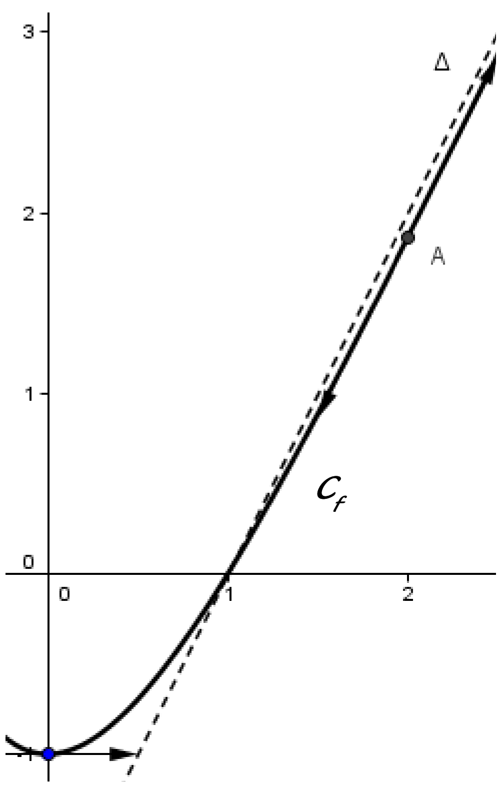
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
f	-1	↗	0	↗	$+\infty$

3) a) Voir ci-contre.

3) b) On doit résoudre sur $[0\,;+\infty[$: $f'(x) = 2$.

On trouve $x_A = 2$ et $f(x_A) = f(2) = 2 - e^{-2}$.

Conclusion : Le point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à Δ est le point A(2 ; 2 – e^{-2}).



62 page 105 du LIVRE :

correction donnée à ceux qui le désirent …

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.
EXERCICE N° 10 :
100 page 114 du LIVRE :

1) a) VRAI. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f_1(x) - f_2(x) = xe^{-x}(1 - x)$ et $\forall\, x \in [0\,;\,1], f_1(x) - f_2(x) \geq 0$.

1) b) FAUX. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Donc, il y a seulement deux points communs aux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

2) a) VRAI. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'_1(x) = (1 - x)e^{-x}$.

2) b) VRAI. En étudiant les variations de f_1, on prouve que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f_1(x) \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}$.

2) c) VRAI. $\frac{1}{4} \in f_1(]-\infty\,;\,1]) = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{e}\right]$ et $\frac{1}{4} \in f_1([1\,;\,+\infty[) = \left]0\,;\,\frac{1}{e}\right]$, donc d'après le théorème de la bijection « généralisé », l'équation $f_1(x) = \frac{1}{4}$ admet deux solutions distinctes sur $\mathbb{R}$: l'une appartient à l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$ et l'autre appartient à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

3) a) VRAI. $T_m : y = (1 - m)e^{-m}x + m^2e^{-m}$, donc $N(0\,;\,m^2e^{-m})$. Or, P a pour coordonnées $(m\,;\,m^2e^{-m})$, donc les points N et P ont bien la même ordonnée.

3) b) VRAI. $H(0\,;\,h) \in T_m \Leftrightarrow m^2e^{-m} = h \Leftrightarrow f_2(m) = h$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'_2(x) = xe^{-x}(2 - x)$. En étudiant les variations de f_2, on trouve que $f_2(]-\infty\,;\,0]) = [0\,;\,+\infty[$; $f_2(]0\,;\,2[) = \left]0\,;\,\frac{4}{e^2}\right[$ et $f_2([2\,;\,+\infty[) = \left]0\,;\,\frac{4}{e^2}\right]$.

$f_2(m) = h$ admet trois solutions sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow h \in f_2(]-\infty\,;\,0])$ et $h \in f_2(]0\,;\,2[)$ et $h \in f_2([2\,;\,+\infty[) \Leftrightarrow h \in \left]0\,;\,\frac{4}{e^2}\right[$.

101 page 114 du LIVRE :

1) VRAI. On pose $\phi(x) = e^x - ax - b$ pour tout réel x. Comme ϕ est dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $0 \in \phi(]-\infty\,;\,+\infty[) =]-\infty\,;\,+\infty[$, alors d'après le théorème de la bijection, l'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2) VRAI. On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (u(x) + u'(x))e^x$ d'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en quelques points où elle peut s'annuler).

3) FAUX. $\forall\, x > 0$, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$. Donc, f n'est pas dérivable en 0.

4) FAUX. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$ (*théorème de composition*) donc la limite de $f(x)$ en 0^+ n'est pas infinie.

5) FAUX. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -e^{-x}$ et $f'(x) \neq -f(x)$, donc f n'est pas solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

EXERCICE N° 11 : correction donnée à ceux qui le désirent …

EXERCICE N° 12 :
69 page 107 du LIVRE : correction donnée à ceux qui le désirent …
97 page 112 du LIVRE :
Partie A :

1) a) Par lecture graphique, on trouve que d a pour équation : $y = x + 1$.
Comme la droite d est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $(+\infty)$ et de $(-\infty)$, alors on a :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$. D'où : $\boldsymbol{m = p = 1}$.

1) b) A(0 ; 1) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$ et la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, donc :

$\forall\, h \in \mathbb{R}$, on a : $f(0 + h) + f(0 - h) = 2 \times y_A = 2$ soit encore :

$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R}}$**, on a** $\boldsymbol{f(-x) + f(x) = 2}$**.**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

1) c) En utilisant le résultat de la question 1) b), on obtient : $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ pour tout réel x, ce qui prouve que la **fonction φ est impaire**.

2) * En utilisant le résultat de la question 1) c), on prouve que $b = 0$.

* φ est dérivable sur ℝ comme produit et composée de fonctions dérivables sur ℝ et f est dérivable sur ℝ comme somme de fonctions dérivables sur ℝ.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi'(x) = f'(x) - 1$, d'où : $\varphi'(0) = f'(0) - 1$. Or, $f'(0)$ = coefficient directeur de T (tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0), donc $f'(0) = 1 - e$ et $\varphi'(0) = -e$.

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi'(x) = a(1 - 2x^2)e^{-x^2}$ d'où $\varphi'(0) = a$ et on a donc $a = -e$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = x + 1 + (-e)xe^{-x^2}$.

Partie B :

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{1-x^2}$.

On trouve alors : $f'(0) = 1 - e$ et $f(0) = 1$, donc la tangente au point A(0 ; 1) est bien **la droite T d'équation : $y = (1 - e)x + 1$.**

1) b) On étudie le signe de la différence : $f(x) - (1 - e)x - 1 = ex(1 - e^{-x^2})$ pour tout réel x.

Comme $e > 0$ et $1 - e^{-x^2} \geq 0$ pour tout réel x, alors le signe de cette différence dépend du signe de x.

On trouve : **sur]- ∞ ; 0[, $\mathcal{C}$ est strictement en dessous de sa tangente T ; sur]0 ; + ∞[, la courbe $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de sa tangente et en $x = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T ont un point commun, le point A(0 ; 1).**

2) a) f' est dérivable sur ℝ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur ℝ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f''(x) = (6x - 4x^3)e^{1-x^2}$, et comme $e^{1-x^2} > 0$ pour tout réel x, alors **le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $6x - 4x^3$ ou que celui de $2x(3 - 2x^2)$.**

2) b) Sur [0 ; 1], on a : $1 \leq 3 - 2x^2 \leq 3$, donc $f''(x) \geq 0$ et f' est strictement croissante sur [0 ; 1].

Par ailleurs : $f'(0) = 1 - e$ et $f'(1) = 2$, donc $f'(0) \times f'(1) < 0$.

Le théorème de la bijection permet d'en déduire l'existence d'un unique réel α appartenant à]0 ; 1[tel que $f'(\alpha) = 0$. Avec le tableur de la calculatrice, on trouve : $f'(0{,}5) \approx -0{,}06$ et $f'(0{,}6) \approx 0{,}469$, donc : $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$; puis, $f'(0{,}51) \approx -0{,}006$ et $f'(0{,}52) \approx 0{,}0475$, d'où : $\mathbf{0{,}51 < \alpha < 0{,}52}$.

2) c) En utilisant le fait que $f'(\alpha) = 0$, on obtient : $e^{1-\alpha^2} = \dfrac{1}{1 - 2\alpha^2}$. En remplaçant $e^{1-\alpha^2}$ par ce quotient dans l'expression de $f(\alpha)$, il vient : $\boldsymbol{f(\alpha) = \dfrac{1 - 2\alpha^2 - 2\alpha^3}{1 - 2\alpha^2}}$.

Sur [0 ; 1], la fonction f' s'annule en changeant de signe en α, donc f admet un extremum local en α, qui vaut $f(\alpha) = \dfrac{1 - 2\alpha^2 - 2\alpha^3}{1 - 2\alpha^2}$. Comme f est strictement décroissante sur [0 ; α], puis est strictement croissante sur [α ; 1], cet extremum relatif est un minimum relatif pour la fonction f.

<u>EXERCICE N° 13 : *Extrait de Polynésie (septembre 2005)*</u>

Correction donnée à ceux qui le désirent …

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

CORRECTION DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES :

FICHE N° 3 :

EXERCICE N° 4 : *Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)*

(A) FAUX. Pour tout réel x, on a : $f(-x) = x^2e^x$ et $f(-x) \neq f(x)$ si $x \neq 0$.

(B) FAUX. On verra plus tard (!) que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Ici, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

(C) VRAI. ($f'(x) = x(2 - x)e^{-x}$ pour tout réel x) ; **(D) VRAI.**

(E) VRAI. $\forall\, x > 2$, on a : $x > 0$; $2 - x < 0$ et $e^{-x} > 0$. Donc : $\forall\, x > 2$, on a $f'(x) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]2 ; +\infty[$, donc : $\forall\, x > 2$, on a $f(x) < f(2) \leq 1$.

EXERCICE N° 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2e^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x. **La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

EXERCICE N° 6 :

1) $h(x) = xe^{-x}$ et $x_0 = 1$;
$y = \dfrac{1}{e}$ (tangente horizontale)

2) $h(x) = xe^{-x}$ et $x_0 = 0$.
$y = x$.

EXERCICE N° 7 : *Extrait de l'épreuve du concours EFREI (mai 2010)*

a. FAUX. ($\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (-3x^2 + 5x - 7)e^{-3x}$).

b. FAUX. ($\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -3x^2 - x - 2e^{-3x} + 6xe^{-3x}$). **c. VRAI.**

EXERCICE N° 8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.
$A(0 ; 1) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$; $f'(0) = -6 \Leftrightarrow b - c = -6$;

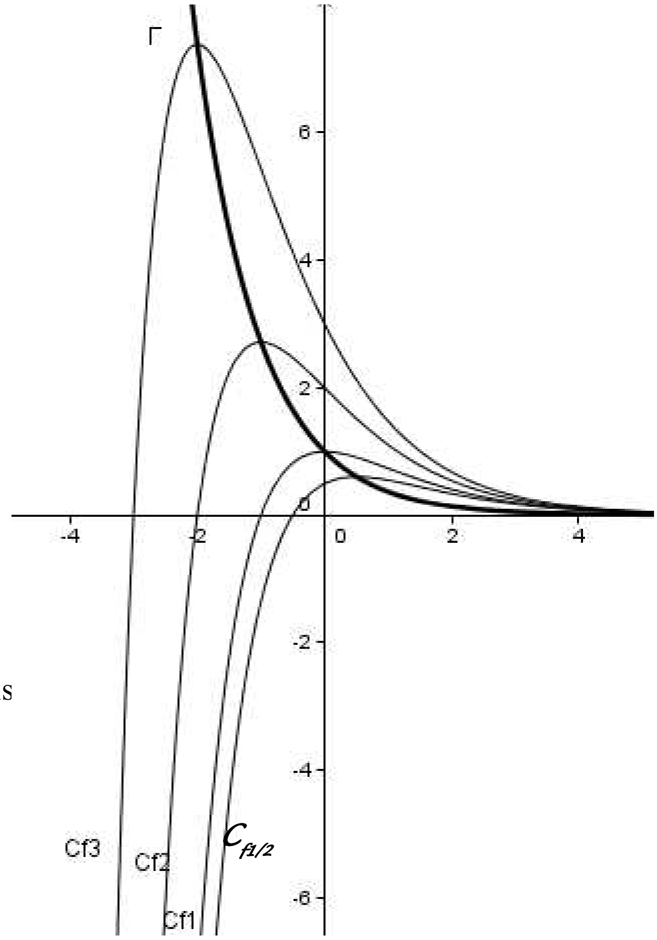
La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1 $\Leftrightarrow f'(1) = 0$
$\Leftrightarrow (a - c) \times e^{-1} = 0 \Leftrightarrow a = c$.

On en déduit que : ***a* = 1 ; *b* = - 5 et *c* = 1. On a donc : $f(x) = (x^2 - 5x + 1)e^{-x}$ pour tout réel *x*.**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

EXERCICE N° 9 : <u>62 page 105 du LIVRE :</u>

1) a) : voir ci-contre.



1) b) On suppose $m_1 \neq m_2$ et on résout sur IR :
$(x + m_1)e^{-x} = (x + m_2)e^{-x}$.
Comme $e^{-x} \neq 0$ pour tout réel x et que $m_1 \neq m_2$, alors l'équation n'admet pas de solution.

Conclusion : Deux courbes $\mathcal{C}_{m_1}$ et $\mathcal{C}_{m_2}$ avec $m_1 \neq m_2$ n'ont aucun point commun.

2) a) $\forall$ m $\in$ IR, la fonction f_m est dérivable sur IR comme produit et composée de fonctions dérivables sur IR.
$\forall$ m $\in$ IR et $\forall$ $x \in$ IR, on a : $f'_m(x) = (1 - x - m)e^{-x}$.

2) b) $\forall$ m $\in$ IR, $f'_m(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = 1 - m$, donc f_m admet un extremum local en $x = 1 - m$.

Comme f_m est strictement croissante sur $]-\infty ; 1 - m]$, puis est strictement décroissante sur $[1 - m ; +\infty[$, alors $f_m(1 - m)$ est le maximum de f_m sur IR.

Donc **I_m a pour coordonnées $(1 - m ; e^{m-1})$.**

Conclusion : $\forall$ m $\in$ IR, le point I_m existe et $I_m(1 - m ; e^{m-1})$.

3) a) On trouve : $y_{I_m} = e^{-x_{I_m}}$ où $I_m(x ; y)$.

3) b) Le point I_m appartient donc à la courbe $\Gamma : y = e^{-x}$.

4) a) $x_{I_m} = 1 - m$, donc lorsque m décrit IR, $(1 - m)$ décrit IR également et **x_{I_m} décrit IR.**

b) Comme x_{I_m} décrit IR, alors $I_m(x_{I_m} ; e^{-x_{I_m}})$ **décrit Γ en entier** car la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est définie sur IR.

<u>EXERCICE N° 11 :</u>

PARTIE A : Soit u la fonction définie sur IR par $u(x) = \dfrac{1 - x^2}{2}$.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$.

2) u est définie et dérivable sur IR comme fonction polynôme. $\forall$ $x \in$ IR, on a : $u'(x) = -x$.

PARTIE B : On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{\frac{1 - x^2}{2}}$.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$. (*Indication : théorème de composition).*

La courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

2) La fonction f est dérivable sur IR comme composée de fonctions dérivables sur IR.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -\,x e^{\frac{1-x^2}{2}}$. Comme $e^{\frac{1-x^2}{2}} > 0$ pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(-\,x)$.

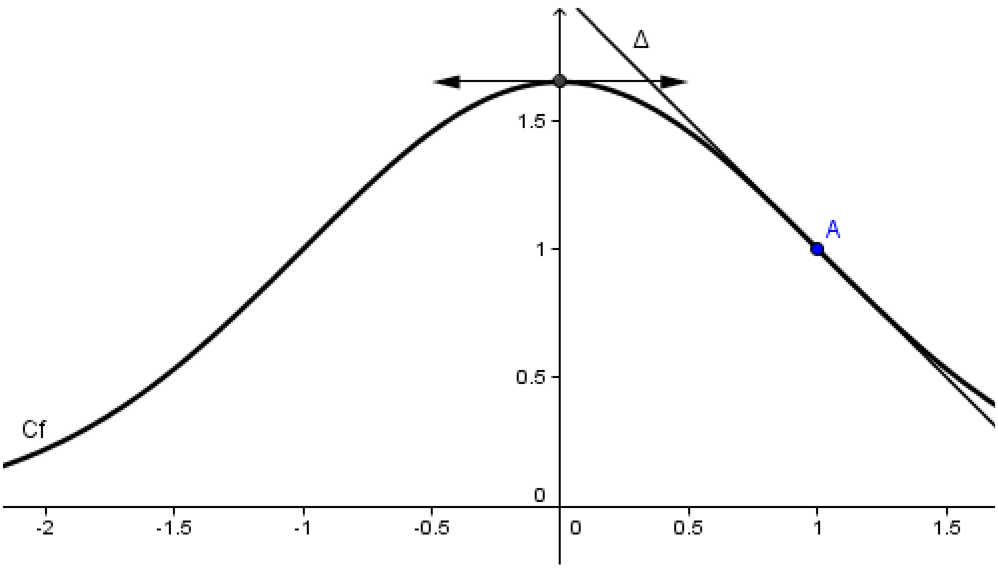
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0^+ ↗	$\sqrt{e}$	↘ 0^+

Remarque : $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

3) Ci-contre :

4) $y_A = 1$.

5) $\Delta : y = -\,x + 2$.



EXERCICE N° 12 : <u>69 page 107 du LIVRE :</u>

1) On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, et donc la droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $(+\infty)$.

2) a) On pose $X = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. On a : $\forall\, x > 0, \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = (X + X^2 + X^3) \times \dfrac{1}{e^X}$.

On verra plus tard (!) que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Par théorème de composition, on trouve que : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^2}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^3}{e^X} = 0^+$, d'où :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0^+$. **2) b)** Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right)$ est finie et vaut 0, alors la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$.

3) a) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

$\forall\, x > 0$, on a : $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})\right) = \ldots = \frac{1-x}{x^4} \times e^{-\frac{1}{x}}$.

3) b) Le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ dépend du signe de $(1 - x)$.

$\forall\, x \in\,]0\,;1[$, on a : $f'(x) > 0$, donc **la fonction f est strictement croissante sur [0 ; 1].**

$\forall\, x \in\,]1\,;+\infty[$, on a : $f'(x) < 0$, donc **la fonction f est strictement décroissante sur [1 ; + ∞[.**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	**0**	$-$	
f	**0**	$\nearrow$	$\mathbf{\frac{3}{e}}$	$\searrow$	**1**

4) La courbe **1** car : $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$.

<u>EXERCICE N° 13 : *Extrait de Polynésie (septembre 2005)*</u>

1) a) Pour tout réel x, on a : $-1 \leq \cos(4x) \leq 1$et comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, on obtient l'encadrement demandé.

1) b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$. En utilisant le résultat de la question 1) et le théorème « des gendarmes », on en déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

Remarque : on peut en déduire que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe Γ au voisinage de $(+\infty)$.

2) Comme $e^{-x} \neq 0$ pour tout réel x, alors l'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $\cos(4x) = 1$.

On trouve : $x = k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : Les points communs aux deux courbes sont donc les points $\boldsymbol{M_k(k\frac{\pi}{2}\,;\, e^{-k\frac{\pi}{2}})}$ avec $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$.

3) a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$ et $u_{n+1} = e^{-(n+1)\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \times u_n$. **Ceci prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{2}}$ et de premier terme $u_0 = 1$.**

3) b) La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{2}}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Comme sa raison vérifie $0 < e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$ et que son premier terme u_0 est strictement positif, alors **la suite géométrique (u_n) est strictement décroissante.**

Comme sa raison vérifie $-1 < e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$, alors **la suite (u_n) est convergente et $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 2.

4) a) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -\,e^{-x} \times \cos(4x) + e^{-x} \times (-\,4\sin(4x))$.

4) b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\,e^{-x}$.

Pour $x = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a : $f'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -\,e^{-k\frac{\pi}{2}}$.

Les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont en chacun de leurs points communs des tangentes ayant le même coefficient directeur, donc ces tangentes sont confondues.

5) On a $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\,e^{-\frac{\pi}{2}}$ et une valeur approchée à 10^{-1} près par excès de $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est (- 0,2).