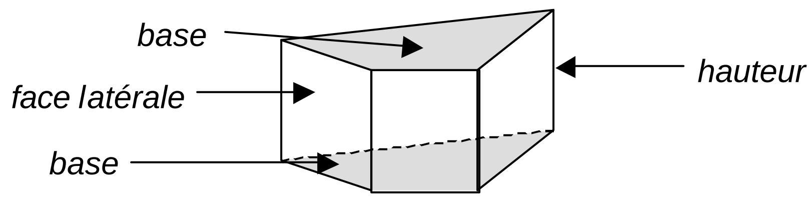
PYRAMIDES, CÔNES DE RÉVOLUTION, SPHÈRES ET BOULES, AGRANDISSEMENT ET RÉDUCTION, SECTION.

I) PRISMES DROITS ; CYLINDRES DE RÉVOLUTION.

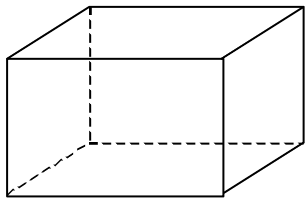
1) Prismes droits :

Ils ont 2 faces qui sont superposables : **ce sont les bases.**
Les autres faces, appelées **faces latérales**, sont **des rectangles**.

a) Cas général :



b) Cas particuliers :



Parallélépipède rectangle ou pavé droit :
toutes les faces, même les bases sont **des rectangles :**

cube : toutes les faces sont **des carrés.**

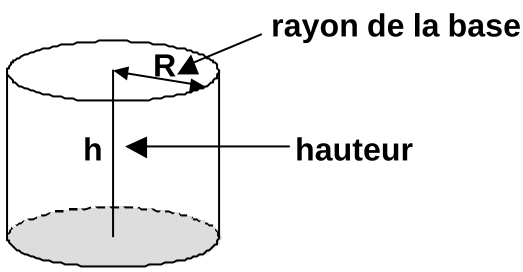
c) Volume et aire :

VOLUME = Aire de la base $\times$ hauteur.

AIRE LATÉRALE = Périmètre de la base $\times$ hauteur.

AIRE TOTALE = Aire latérale + Aire des bases.

2) Cylindres :



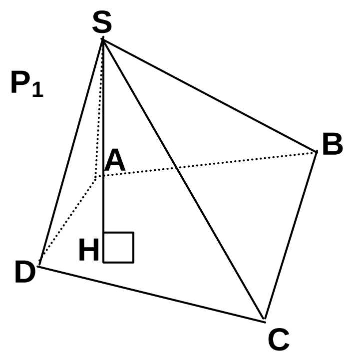
VOLUME = Aire de la base $\times$ hauteur = $\pi \times R^2 \times h$.

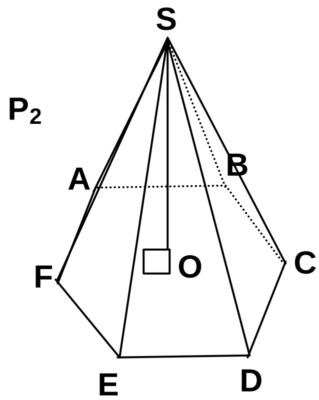
AIRE LATÉRALE = $2 \times \pi \times R \times h$.

AIRE TOTALE = $2 \times \pi \times R \times h + 2 \times \pi \times R^2$.

II) PYRAMIDES :

1) Exemples de pyramides :



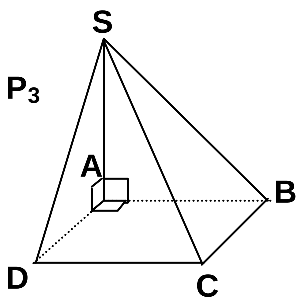


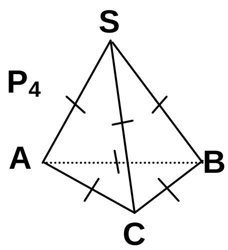
Pyramide P_1 :

C'est une pyramide quelconque.
S est son sommet.
Le polygone quelconque ABCD est sa base. [SH] est sa hauteur, elle est perpendiculaire au plan de la base.
[SA], [SB], [SC] et [SD] sont ses arêtes latérales
Les triangles SAB, SBC, SCD, SDA sont ses faces latérales.
Dans toute pyramide, les faces latérales sont toujours des …………….....

Pyramide P_2 :

C'est une pyramide **régulière.**
Une pyramide **régulière** est une pyramide dont la base est un polygone régulier et dont la hauteur passe par le centre du cercle circonscrit au polygone de base.
Dans le cas de la pyramide **P_2, ce polygone est un …………………….**
Les arêtes latérales ont ……………..… ……………… et les faces latérales sont des triangles ……………….





Pyramide P_3 :

C'est une pyramide dans laquelle la hauteur est confondue avec une …………….. et dont la base est un…………………

Pyramide P_4 :

C'est un **tétraèdre régulier.**
Un tétraèdre est une pyramide dont la base est un …………..

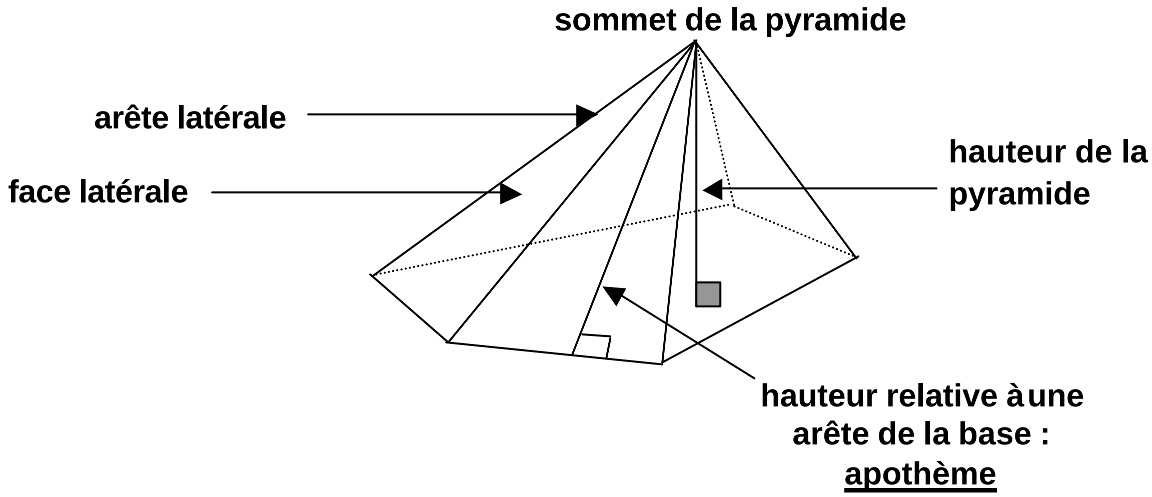
Définition 1 :

Un tétraèdre régulier est une pyramide dont les 6 arêtes ont même longueur.

Les 4 faces sont donc des triangles ……………………

Définition 2 :

Une pyramide est <u>un solide</u> limité par un polygone appelé **base** et par des triangles ayant un sommet commun, le ……………. de la pyramide. Ces triangles sont appelés les faces …………….. de la pyramide.

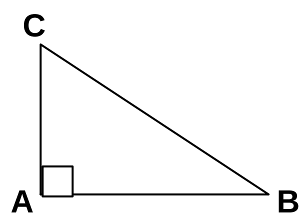


2) **Exercice : Combien la pyramide ci-dessus a-t-elle** de faces latérales ? de bases ? de faces ? de sommets ? d'arêtes ?

III) CÔNES DE RÉVOLUTION :

1) Principe :

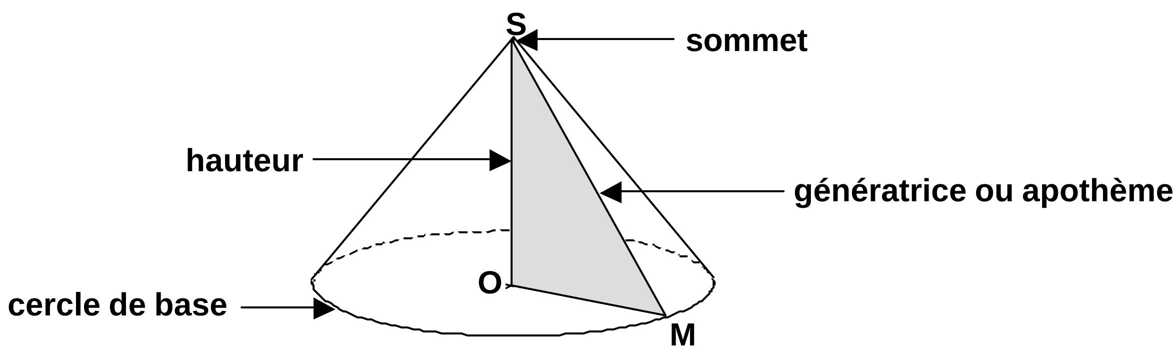
Activité 1 : On fait pivoter une équerre symbolisée par le triangle rectangle ABC autour de [AC]. **Quelle est** la trajectoire du point B ? **Quelle surface** parcourt alors le segment [AB] ?



Activité 2 : **Mêmes questions que précédemment** pour le point C et pour [AC] en faisant pivoter l'équerre autour de [AB].

2) Définition :

Un cône de révolution est <u>un solide</u> engendré par un triangle rectangle pivotant autour d'un côté de l'angle droit.
On dit que le cône est engendré par le triangle ……. tournant autour de l'axe ……, et <u>faire un tour complet</u> se dit aussi <u>faire une révolution</u>, d'où le nom **de cône de révolution**:

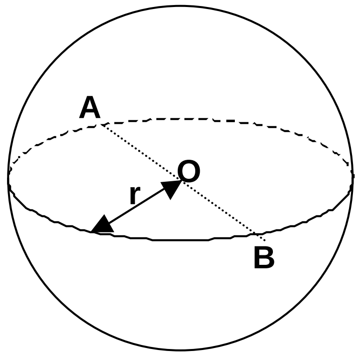


Le disque de centre O et de rayon OM est ………………….. du cône.

Le segment [SM] est appelé ……………… ou ………………., en tournant, il engendre la surface …………………… du cône.

IV) BOULES ET SPHÈRES :

Définition 1 : La sphère de centre O et de rayon r est la <u>surface</u> constituée de tous les points qui sont àla distance …… du point O.



Définition 2 : La boule de centre O et de rayon r est <u>le solide</u> constitué de tous les points de l'espace situés àune distance du point O inférieure ou égale àr.

Définition 3 : Deux points d'une sphère sont <u>diamétralement opposés</u> s'ils sont <u>alignés avec le centre de la sphère.</u>

V) VOLUMES :

1) Pyramides :

a) <u>Théorème 1 :</u> Le volume d'une pyramide est égal au ……….. du volume du prisme qui a même base et même hauteur : $V = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \times \dots\dots \times \dots\dots$ où V est le volume de la pyramide de hauteur h et d'aire de base B.

b) <u>Remarque :</u> V, B et h sont exprimés avec <u>les mêmes unités.</u>

c) <u>Exercices :</u>

<u>Exercice 1 :</u> Une pyramide àbase carrée a un volume de 75 m^3 et sa hauteur est 9 m.
<u>Quelle est la longueur c du côté de sa base ?</u>

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h = \frac{1}{3} \times \dots\dots \times \dots\dots =$$

<u>Exercice 2 :</u> Une pyramide a un volume de 0,01462 dm^3 et une hauteur de 43 mm.
<u>Quelle est l'aire A de sa base en cm² ?</u>

$$V = 0{,}01462 \text{ dm}^3 = \dots\dots\dots\dots \text{ mm}^3 .$$
$$V = \frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \times A \times \dots\dots$$
$$\text{d'où } A = \dots\dots\dots\dots\dots \text{ mm}^2 = \dots\dots\dots \text{ cm}^2$$

<u>Exercice 3 :</u> Une pyramide a un volume de 990 000 cm^3 et l'aire de sa base est 270 dm².
<u>Quelle est sa hauteur h en m ?</u>

$$V = 990\ 000 \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots\dots\dots \text{ m}^3 \text{ ; Aire de la base } = 270 \text{ dm}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2.$$
$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h = \frac{1}{3} \times \dots\dots\dots \times h \text{ d'où } h =$$

2) <u>Cône de révolution :</u>

a) <u>Théorème 2 :</u> Soit V le volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon de disque de base R, alors : $V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$

Le volume du cône de révolution de hauteur h et de rayon R est égal au ………. du volume du cylindre de révolution qui a même base et même hauteur.

b) <u>Remarque :</u> V, h et R sont exprimés avec <u>les mêmes unités.</u>

c) <u>Exercices :</u>

<u>Exercice 1 :</u> Le rayon de la base d'un cône de révolution est 10 cm et sa hauteur est 12 cm. **<u>Quel est le volume V de ce cône ?</u> <u>Donner le résultat sous forme exacte, puis à 1 cm^3 près par excès :</u>**

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times …… \times …… =$$

<u>Exercice 2 :</u> Le volume d'un cône est 942 mm^3, sa hauteur est 25 mm.
<u>Quel est le rayon r de sa base ?</u> *(prendre pour $\pi \approx 3,14$)*

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h \approx \frac{1}{3} \times …… \times r^2 \times ……$$

<u>Exercice 3 :</u> Le volume d'un cône est 0,124 344 dm^3 et le rayon de son disque de base est 6 cm. **<u>Quelle est sa hauteur h en mm ?</u>** *(prendre pour $\pi \approx 3,14$)*

$$V = 0{,}124\ 344\ dm^3 = …………….\ mm^3.$$

Rayon du disque de base = 6 cm = ……… mm.

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h \approx \frac{1}{3} \times …… \times …….. \times h$$

3) <u>Sphère et boule :</u>

a) <u>Théorème 3 :</u> Soit A l'aire d'une sphère de rayon R et V le volume d'une boule de rayon R, alors :

$$A = 4 \times \pi \times R^2 \text{ ou } 4\pi R^2.$$
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 \text{ ou } \frac{4}{3}\pi R^3.$$

b) <u>Remarque :</u> A et R sont exprimés avec la même unité. V et R sont exprimés avec la même unité.

c) <u>Exercices :</u>

<u>Exercice 1 :</u> Le rayon d'une sphère de centre O est 12 cm. **<u>Calculer</u>** son aire *A* <u>sous forme exacte</u>, **<u>puis</u>** à 1 mm² près. **<u>Calculer</u>** la longueur L d'un grand cercle <u>sous forme exacte</u>.

Exercice 2 : **Calculer** le volume *V* en L d'un bassin ayant la forme d'une demi-sphère de 1,2 m de diamètre. **Donner** l'arrondi au L près.

VI) AGRANDISSEMENT ET RÉDUCTION :

1) Propriété 1 : Lorsque l'on agrandit ou que l'on réduit une figure, on obtient une figure de même forme. D'autre part :

Si les dimensions initiales sont multipliées par un même nombre k, alors :

- ☞ **le périmètre initial est multiplié par …..**
- ☞ **l'aire initiale est multipliée par ……**
- ☞ **le volume initial est multiplié par …..**
- ☞ **les angles sont ……………**

2) Remarque : **Si $k < 1$,** alors on a effectué ……………………………

Si $k > 1$, alors on a effectué …………………………….

3) Exercices :

PB 1 : *Le périmètre d'un stade de football est 300 m. On a réalisé un plan de ce stade à une certaine échelle et il a été représenté par un rectangle d'aire 200 cm² et de longueur 20 cm.*

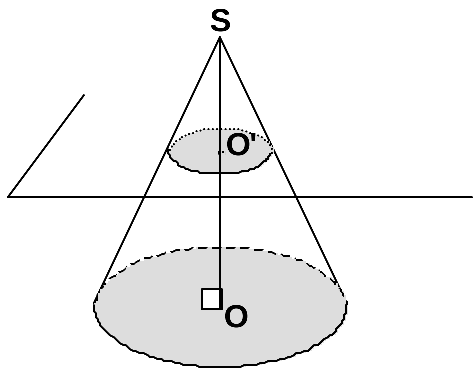
1) Déterminer l'échelle de réduction.

2) Donner les dimensions réelles de ce stade.

PB 2 : *Mon voisin a utilisé 50 kg de peinture pour repeindre la façade de sa maison.*
Sachant que les dimensions de ma maison sont une fois et demi plus grandes, **quelle quantité de peinture dois-je prévoir** pour repeindre ma façade ?

PB 3 : *Un cône de sommet S a pour base un disque de centre O et d'aire 63 cm². La section de ce cône par un plan parallèle à la base est un disque de centre O' et d'aire 30,87 cm² :*

On donne SO = 7 cm.
Calculer l'échelle de réduction et
en déduire SO'.



PB 4 : **1)** *Le côté d'un carré augmente de 30 %.*
Calculer le pourcentage d'augmentation de l'aire.

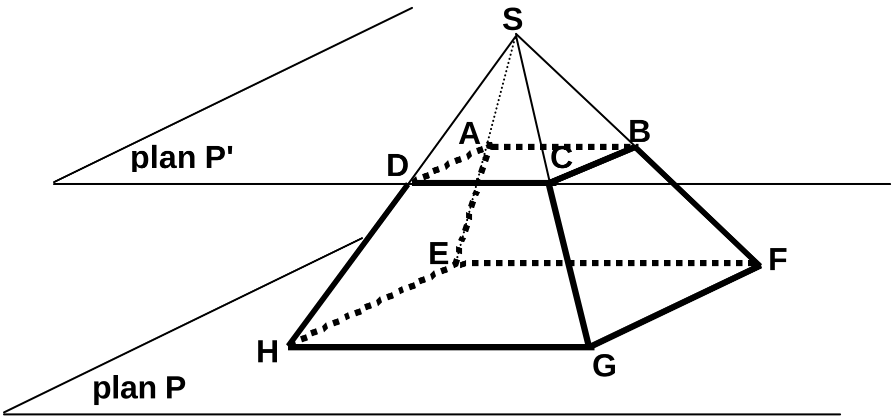
2) *Le rayon d'une boule diminue de 20 %.*
Quel est le pourcentage de diminution du volume ?

VII) SECTIONS :

1) Propriété 1 : **Si une droite est perpendiculaire à un plan en un point, alors elle est perpendiculaire à toutes les …………… de ce plan passant par ………………..**

2) **Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base :**

Voici le dessin en perspective cavalière d'un **tronc de pyramide** : ce solide a été obtenu en **coupant la pyramide SEFGH par un plan strictement parallèle à la base :**



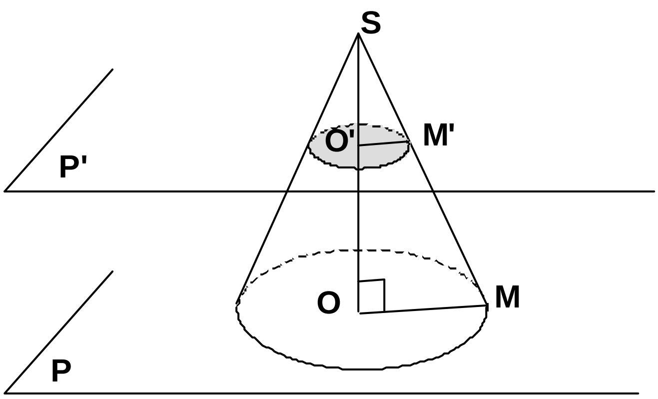
On obtient alors le quadrilatère …………, section de la pyramide par le plan **P'** tel que (AB) et (EF) soient parallèles, de même (BC) et ( ), (CD) et ( ), (DA) et ( ). On obtient une nouvelle pyramide de base …….. et de sommet ……, réduction de la pyramide SEFGH.

Propriété 2 : **La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est une ……………….. du polygone de base et leurs côtés sont …………………. deux à deux.**

Rappel : *Si les dimensions de SEFGH ont été divisées par k, alors les aires des faces latérales et de la base de SEFGH sont divisées par ……. et le volume de SEFGH est divisé par ……… pour obtenir respectivement les aires des faces latérales et de la base et le volume de la pyramide réduite.*

3) **Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base :**

Voici un cône de sommet S, O est le centre du disque de base, P est le plan de la base et P' est un plan strictement parallèle à P :



La section du cône par le plan **P'** est un ………….. dont le centre est sur ……. et dont le rayon est …....... avec (OM) ……………….. à (O'M').

Le plan **P'** partage alors le cône en un cône C', ……………… du cône initial et un **…………. de cône.**

Le cône C' a pour sommet ……… et pour base le disque de centre …… et de rayon …….

Propriété 3 : **La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est une réduction du disque de base.**
Le centre du disque de section est le point ………………….. de …………………. avec le plan parallèle à la base.

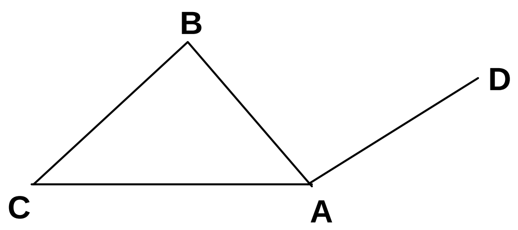
Rappel : *Si les dimensions initiales ont été divisées par k, alors les aires initiales sont divisées par ….. et le volume initial est divisé par …… pour obtenir respectivement les aires et le volume du cône réduit.*

4) Application :

Exercice 1 : On donne SO = 8 cm et OM = 6 cm. Sur [SO], on place un point O' tel que SO' = 2 cm.

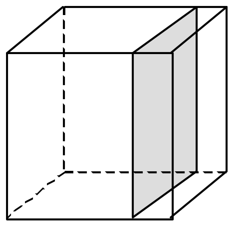
a) Définir la section obtenue en coupant le cône par un plan parallèle à la base passant par O'.
b) Calculer le volume V et l' aire latérale A du cône initial sous forme exacte.
c) En déduire les valeurs exactes du volume V' et de l'aire latérale A' du cône réduit.

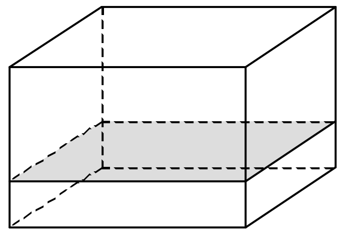
Exercice 2 : **Terminer la vue en perspective** du prisme droit ABCDEF sachant que ABC est l'une des bases triangulaires de ce prisme et [DA] une arête de ce prisme :



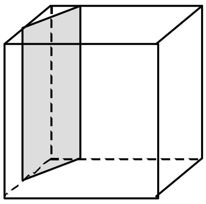
5) Section d'un cube et d'un parallélépipède rectangle :

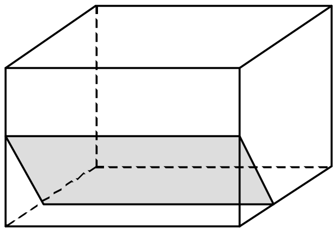
Propriété 4 : **La section d'un cube ou d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un ……………. ou un …………………….. superposable à…………………….**





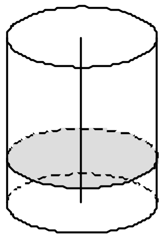
Propriété 5 : **La section d'un cube ou d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un ………………. dont une des dimensions est la longueur de cette ……………..**



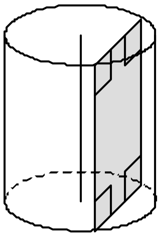


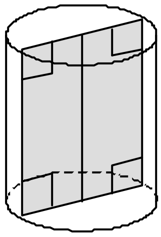
6) Section d'un cylindre :

Propriété 6 : **La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un …………… superposable aux …………………………..**



Propriété 7 : **La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un …………………. dont une des dimensions est la ………………… du cylindre.**



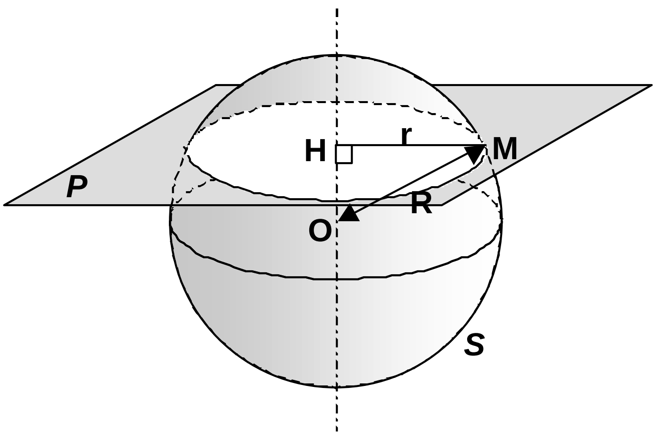


Remarque : Si le plan contient l'axe de révolution du cylindre alors, la section obtenue est un …………………… ayant pour dimensions le ……………….. et la ………………… du cylindre.

7) Section d'une sphère :

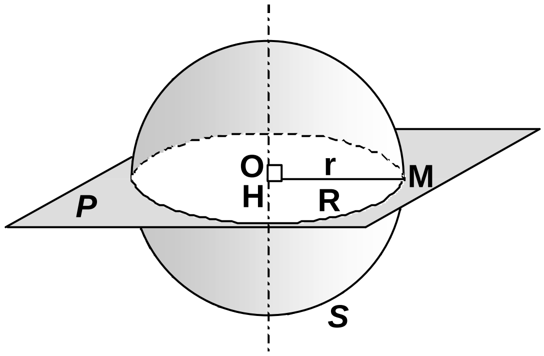
Propriété 8 : **La section d'une sphère par un plan est un …………. ou un ………… La section d'une boule par un plan est ……………………....................**

Soit *S* une sphère de centre O et de rayon R et un plan *P*. Soit H le point du plan *P*, pied de la perpendiculaire menée du centre O au plan *P.*



1er cas : OH < R

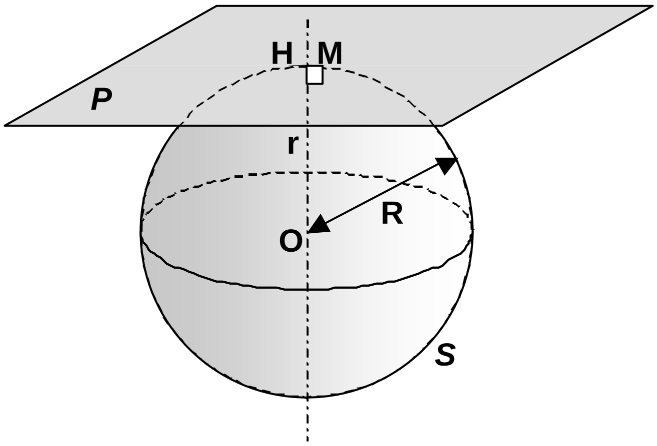
La section de la sphère par le plan *P* est un …………… de centre ….. et de rayon r = ………….



Cas particulier : O et H sont confondus donc r = R

La section de la sphère par un plan qui passe par le centre de la sphère est un ……………………… de la sphère : son rayon et son centre sont ceux de ………………………..

2ième cas : OH = R

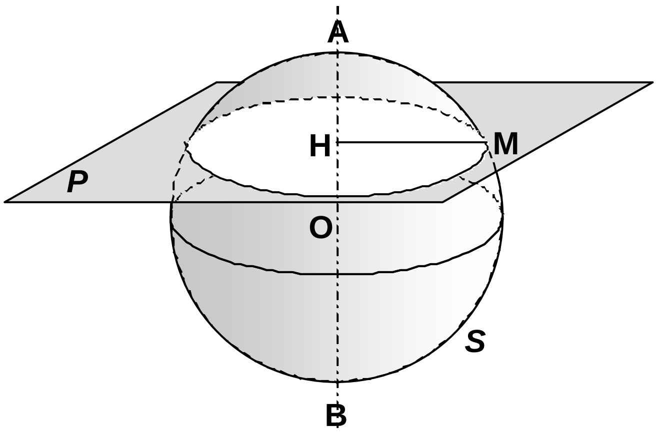


Dans ce cas, le plan *P* et la sphère ont ……………………………. le point …….
On dit que le plan *P* est …………..
à la sphère *S*.

3ième cas : OH > R

Dans ce cas, la sphère *S* et le plan *P* ………………………………………..

8) **Exercice :**



Sur la figure en perspective ci-contre, on a représenté la section d'une sphère *S* de rayon R par un plan *P* perpendiculaire en H au diamètre [AB] de la sphère *S.*
On donne OA = R = 4 cm et OH = 2,6 cm.

a) M est un point commun à *P* et à *S* .
Dessiner en justifiant le triangle OHM en vraie grandeur. **Calculer** HM.

b) Définir la section de la sphère *S* par le plan *P.*